Examen de Métodos Numéricos Dic. 2008

IMERL – Facultad de Ingeniería – UDELAR

N° Examen : **Nombre:**

1) Para resolver numéricamente la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$

se considera el método: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n))$ (Euler modif.)

a) Probar que el método es de segundo orden (esto es : error local = $O(h^3)$)

b) Determinar la región de estabilidad del método

c) Si $y' = 2y$, $y(0) = 1$, al aplicar el método en el intervalo [0 , 1] con $h = 0.1$, ¿que valor se obtiene para $y(1)$?. ¿Cúal es el error global en $x = 1$?
Repetir lo anterior con $h = 0.05$.
¿Estos errores obtenidos son coherentes con la parte a) ? Explique

d) Defina extrapolación de Richardson y diga cuál es su utilidad.
Use extrapolación de Richardson para obtener un mejor valor para $y(1)$ a partir de los valores obtenidos con $h = 0.1$ y $h = 0.05$.¿Cuál es ahora el error cometido?

2) a) Establezca el problema de mínimos cuadrados lineal. Plantee las Ecuaciones Normales. Demuestre que una solución de las Ecuaciones Normales resuelve el problema de mínimos cuadrados lineal y recíprocamente.

b) Describa que es la descomposición QR de una matriz A. Muestre como se puede usar la descomposición QR para la resolución del problema de mínimos cuadrados lineal

c) Dados s sistemas sobredeterminados con distinto 2° miembro: $Ax \approx b_k$, $k = 1,..,s$ donde A es m x n , determine el costo operacional de resolver todos estos sistemas usando descomposición QR (que se halla por Gram Schmidt, por ej.) en función de m , n y s

d) Desarrolle el Método de Gauss-Newton para resolver el problema de mínimos cuadrados no lineal

3) Las funciones de base radial, son funciones que dependen solamente de la distancia entre pares de puntos, y ciertos parámetros arbitrarios. Una de estas funciones se puede definir de la siguiente forma: $\phi_j(x, x_j) = \left(\left(x - x_j \right)^2 + c_j^2 \right)^\beta$

Considere que una función $F(x)$ se aproxima mediante: $F^*(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \phi_j(x, x_j)$

a) Plantee el sistema de ecuaciones que permite encontrar la expresión de la función aproximada $F^*(x)$ a partir de los valores de la función $F(x)$ en n puntos de su dominio $\{ x_1 , x_2 , \ldots\ldots , x_n \}$

b) Tomando $\beta = 1/2$ y $c_j = 1$, considerando el caso en que $F(x)$ es la parábola : $F(x) = -4x^2 + 4x$, y se toman para la aproximación tres puntos del dominio de abscisas: $x = [0, 0.5, 1]^T$. Encuentre la aproximación de la función que surge de aplicar el resultado de la parte a).

c) Determine el error de la aproximación en puntos intermedios a los considerados para el sistema de la parte b).

d) Repita las partes anteriores con $c_j = 5$ y $c_j = 100$. Comente como evoluciona el error con la variación de c_j ¿Qué acontece con el número de condición? Justifique ¿En su calculadora, qué valor de c_j permitiría obtener la aproximación con el menor error posible? Justificar.

Puntajes: 1) 33 : a) 8 b) 8 c) 9 d) 8
2) 34 : a) 9 b) 8 c) 8 d) 9
3) 33 : a) 8 b) 9 c) 7 d) 9