Examen Métodos Numéricos Soluciones 1 de Agosto 2008
IMERL - Facultad de Ingeniería - UDELAR

1) a) Def.: A matriz nxn, real, simétrica es definida positiva si :

$x^t Ax > 0 \qquad \forall x \in R^n, x \neq \vec{0}$

Sea λ real valor propio de la matriz A, sea v no nulo un vector propio asociado : Av = λv. Entonces : v^t Av > 0 => v^t (λv) > 0 => λ(v^t v) > 0

Pero v^t v = $\|v\|^2$ > 0 pues v es no nulo. Entonces λ > 0

b) k > 0 ,

$$\begin{vmatrix} k & 2 \\ 2 & 3.1 \end{vmatrix} = 3.1k - 4 > 0 \Rightarrow k > 1.2903 \ , \begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & 3.1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 5.2k - 15.1 > 0 \Rightarrow k > 2.9038$$

Por lo tanto k = 3

c) $$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, r^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.9 \\ 2 \end{pmatrix}, p^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.9 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_0 = 0.3318, x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.3318 \\ -0.2986 \\ 0.6636 \end{pmatrix}$$

$$, r^{(1)} = \begin{pmatrix} -0.0617 \\ 0.0257 \\ 0.0424 \end{pmatrix}, \beta_0 = 0.0011, p^{(1)} = \begin{pmatrix} -0.0607 \\ 0.0247 \\ 0.0446 \end{pmatrix}, \alpha_1 = 1.9033, x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.2164 \\ -0.2516 \\ 0.7484 \end{pmatrix}$$

$$, r^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.1056 \\ 0.1956 \\ 0.0352 \end{pmatrix}, \beta_1 = 8.0731, p^{(2)} = \begin{pmatrix} -0.3841 \\ 0.3952 \\ 0.3952 \end{pmatrix}, \alpha_2 = 3.1671, x^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

El último valor de x es la solución exacta del sistema.
Se realizaron entonces 3 iteraciones del método de gradiente conjugado.

d) Método de Jacobi : $x^{(i+1)} = -(2/3)y^{(i)} - (1/3)z^{(i)}$

$y^{(i+1)} = -(2/3.1)x^{(i)} + (1/3.1)z^{(i)}$

$z^{(i+1)} = -(1/2)x^{(i)} + (1/2)y^{(i)}$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.3333 \\ -0.2903 \\ 1.0000 \end{pmatrix}, x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.1935 \\ -0.1828 \\ 0.6882 \end{pmatrix}, x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.2258 \\ -0.1932 \\ 0.8118 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -0.9 \\ 2 \end{pmatrix} - Ax^{(3)} \right\|_2 = 0.1261 \ , \quad \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - x^{(3)} \right\|_2 = 2.0828$$

e) Método de Gauss Seidel : $x^{(i+1)} = -(2/3)y^{(i)} - (1/3)z^{(i)}$

$y^{(i+1)} = -(2/3.1)x^{(i+1)} + (1/3.1)z^{(i)}$

$z^{(i+1)} = -(1/2)x^{(i+1)} + (1/2)y^{(i+1)}$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.3333 \\ -0.5054 \\ 0.5806 \end{pmatrix}, x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.4767 \\ -0.4106 \\ 0.5564 \end{pmatrix}, x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.4216 \\ -0.3828 \\ 0.5978 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -0.9 \\ 2 \end{pmatrix} - Ax^{(3)} \right\|_2 = 0.1053 \quad , \quad \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - x^{(3)} \right\|_2 = 2.4289$$

2) a) $sen(0) = 0, sen(\pi/6) = 1/2, sen(\pi/4) = \sqrt{2}/2, sen(\pi/3) = \sqrt{3}/2$

Forma de Lagrange del polinomio de interpolación:

$$P_3(x) = \frac{x(x-\pi/4)(x-\pi/3)}{\pi/6(\pi/6-\pi/4)(\pi/6-\pi/3)} sen(\pi/6) + \frac{x(x-\pi/6)(x-\pi/3)}{\pi/4(\pi/4-\pi/6)(\pi/4-\pi/3)} sen(\pi/4) +$$

$$+ \frac{x(x-\pi/6)(x-\pi/4)}{\pi/3(\pi/3-\pi/6)(\pi/3-\pi/4)} sen(\pi/3)$$

$$P_3(x) = \frac{216x(x-\pi/4)(x-\pi/3)}{\pi^3} - \frac{288\sqrt{2}x(x-\pi/6)(x-\pi/3)}{\pi^3} + \frac{108\sqrt{3}x(x-\pi/6)(x-\pi/4)}{\pi^3}$$

Otra forma de hallarlo : $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$P_3(0) = d = sen(0) = 0$

$P_3(\pi/6) = a(\pi/6)^3 + b(\pi/6)^2 + c(\pi/6) = sen(\pi/6) = 1/2$

$P_3(\pi/4) = a(\pi/4)^3 + b(\pi/4)^2 + c(\pi/4) = sen(\pi/4) = \sqrt{2}/2$

$P_3(\pi/3) = a(\pi/3)^3 + b(\pi/3)^2 + c(\pi/3) = sen(\pi/3) = \sqrt{3}/2$

Resolviendo este sistema 3x3 (ya que d = 0) resulta:

a = -0.136489 , b= -0.029944 , c= 1.008027

$P_3(x) = -0.136489x^3 - 0.029944x^2 + 1.008027x$

Otra forma más: Forma de Newton:

$P_3(x) = a' + b'x + c'x(x-\pi/6) + d'x(x-\pi/6)(x-\pi/4)$

$P_3(0) = a' = sen(0) = 0$

$P_3(\pi/6) = b'\pi/6 = sen(\pi/6) = 1/2 \Rightarrow b' = 3/\pi$

$P_3(\pi/4) = b'(\pi/4) + c'(\pi/4)(\pi/4 - \pi/6) = sen(\pi/4) = \sqrt{2}/2$

$\Rightarrow$ $c' = 48(\sqrt{2}/2 - 3/4)/\pi^2$

$P_3(\pi/3) = b'\pi/3 + c'(\pi/3)(\pi/3 - \pi/6) + d'(\pi/3)(\pi/3-\pi/6)(\pi/3-\pi/4) = sen(\pi/3) =$

$\sqrt{3}/2 \Rightarrow 1 + c'(\pi^2/18) + d'(\pi^3/216) = \sqrt{3}/2 \Rightarrow d'(\pi^3/216) =$

$\sqrt{3}/2 - 1 - 48(\sqrt{2}/2 - 3/4)/18 \Rightarrow d' = -0.136489$

$P_3(x) = 0.954930x - 0.208608x(x-\pi/6) - 0.136489x(x-\pi/6)(x-\pi/4)$

b) $sen(\pi/8) = \sqrt{\frac{1-\cos(\pi/4)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = 0.3826834.....$

$P_3(\pi/8) = 0.382968$

$Error = sen(\pi/8) - P_3(\pi/8) = -2.846*10^{-4}$

c) La derivada cuarta de sen(x) es sen(x). En el intervalo $[0, \pi/3]$ se tiene

$0 \le sen(x) \le \sqrt{3}/2$

$(\pi/8)(\pi/8-\pi/6)(\pi/8-\pi/4)(\pi/8-\pi/4) = -0.013212$

Se tiene : $\frac{-\sqrt{3}/2}{4!}(0.013212) \le Error \le 0 \Rightarrow -4.76745*10^{-4} \le Error \le 0$

La cota obtenida es en valor absoluto mayor que el valor absoluto del error real. El signo del error real concuerda con el de la cota.

3) a) Definimos las variables : $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $y_3 = y''$, ……, $y_{n-1} = y^{(n-2)}$, $y_n = y^{(n-1)}$

El sistema queda : $y_1' = y' = y_2$; $y_2' = y'' = y_3$; ……; $y_{n-1}' = y^{(n-1)} = y_n$;

$y_n' = y^{(n)} = f(x, y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots, y_{n-1}, y_n)$

O sea:

$y_1' = y_2$, $y_2' = y_3$, …………., $y_{n-1}' = y_n$, $y_n' = f(x, y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots, y_{n-1}, y_n)$

La condición inicial es:

$y_1(x_0)=a_0$, $y_2(x_0)=a_1$, $y_3(x_0)=a_2$, ……………., $y_n(x_0)=a_{n-1}$

b) Pasamos a un sistema de primer orden con dos variables: $y_1 = y$, $y_2 = y'$

$y_1' = y_2$

$y_2' = -4x^2y_1 - 2\mathrm{sen}(x^2) - 8x^3$ $\qquad y_1(0) = 1$, $y_2(0) = -2$

Implementamos Euler hacia delante en [0,1] con $\Delta x = 0.1$ para este sistema:

```
y = [ 1 -2 ] ’;  x = 0;
for i = 1:10
  dy = [ y(2)   (-4x^2y(1) – 2sen(x^2) – 8x^3 ) ] ’ ;
   y = y + 0.1*dy;
   x = x + 0.1;
end
```

En la práctica paramos cuando y_1 empieza a tomar valores negativos:

$y^{(0)} = (1,-2)'$, $y^{(1)} = (0.8000,-2.000)'$, $y^{(2)} = (0.6000,-2.0060)'$,

$y^{(3)} = (0.3994,-2.03)'$, $y^{(4)} = (0.1964,-2.084)'$, $y^{(5)} = (-0.0120,-2.1796)'$

Tenemos : $y_1(0.4) = 0.1964$, $y_1(0.5) = -0.0120$

Interpolando linealmente se obtiene $x^* = 0.4942$

Con $y'(0.4) = -2.084$, $y'(0.5) = -2.1796$ interpolamos linealmente y obtenemos $y'(x^*) = -2.1741$

c) Si y_0 , y_1 , ……… , y_n , … es la sucesión generada por el método correspondientes a las abscisas x_0 , x_1 , ……. , x_n , … y si $y(x)$ es la solución exacta de la ecuación, entonces el error global en x_n vale $EG(x_n) = y(x_n) - y_n$

Para definir el error local en x_n consideramos $Y(x)$, la solución exacta de $y' = f(x,y)$ con la condición inicial $y(x_n) = y_n$.

Entonces el error local en x_n vale : $EL(x_n) = Y(x_{n+1}) - y_{n+1}$

Aplicando el método de Euler hacia delante obtenemos:

$y_{n+1} = y_n + 0.1(2y_n) = 1.2y_n \Rightarrow y_n = 1.2^n$ $\;$ x = 1 es la abscisa cuando n = 10

$y_{10} = 1.2^{10} = 6.191736$ Por otro lado la solución exacta es $y(x) = e^{2x}$

$y(1) = e^2 = 7.389056$. Por tanto el error global es $y(1)-y_{10} = 1.19732$

Error local en x = 0.2 : $y_2 = 1.2^2 = 1.44$, $y_3 = 1.2^3 = 1.728$

Hallamos la solución exacta de $y' = 2y$ con la condición inicial $y(0.2) = 1.44$

Esta es : $1.44 e^{2(x-0.2)}$. Si la evaluamos en x = 0.3 resulta el valor : 1.75882

El error local en x = 0.2 vale 1.75882 – 1.728 = 0.03082

Error local en x = 0.5 : $y_5 = 1.2^5 = 2.48832$, $y_6 = 1.2^6 = 2.985984$

Hallamos la solución exacta de $y' = 2y$ con la condición inicial $y(0.5) = 2.48832$

Esta es: $2.48832 e^{2(x-0.5)}$. Si la evaluamos en x = 0.6 resulta el valor : 3.039241

El error local en x = 0.5 vale 3.039241 – 2.985984 = 0.053257

Error local en x = 0.8 : $y_8 = 1.2^8 = 4.299817$, $y_9 = 1.2^9 = 5.159780$

Hallamos la solución exacta de $y' = 2y$ con la condición inicial $y(0.8) = 4.299817$

Esta es : $4.299817 e^{2(x-0.8)}$. Si la evaluamos en x = 0.9 resulta el valor: 5.251808

El error local en x = 0.8 vale 5.251808 – 5.159780 = 0.092

d) Consideramos el problema Test : $y' = qy$, $y(0) = 1$, donde q es una constante compleja. Aplicando el método a este problema queda:

$y_{n+1} = y_n + (h/2)(qy_n + qy_{n+1}) \Rightarrow (1 - hq/2)y_{n+1} = (1 + hq/2)y_n \Rightarrow$

$$y_{n+1} = \left(\frac{1+hq/2}{1-hq/2}\right)y_n \Rightarrow y_n = \left(\frac{1+hq/2}{1-hq/2}\right)^n \Rightarrow y_n \text{ acotada sii } \left|\frac{1+hq/2}{1-hq/2}\right| < 1$$

Si z = hq => $1 > \left|\dfrac{1 + z/2}{1 - z/2}\right| = \left|\dfrac{2+z}{2-z}\right| = \dfrac{|z-(-2)|}{|z-2|} \Leftrightarrow |z-(-2)| < |z-2|$

|z - 2| es la distancia del afijo de z al punto (2,0)
|z + 2| es la distancia del afijo de z al punto (-2,0)
Estas distancias se igualan en el eje Oy (el eje imaginario)
Los z que verifican la condición son los de parte real negativa:
Región de estabilidad de este método : Re(z) < 0