Examen Métodos Numéricos **1 de Agosto 2008**

IMERL - Facultad de Ingeniería - UDELAR

1) a) Sea A una matriz real nxn, simétrica. Defina que es una matriz definida positiva. Pruebe que los valores propios de estas matrices (que son reales por el Teorema Espectral) son todos positivos.

b) Criterio de Sylvester : Sea A una matriz real , nxn, simétrica. Entonces si los n determinantes diagonales son todos positivos, A es definida positiva.

$$\left(a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \ldots\ldots\ldots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ . & . & & . \\ . & & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} > 0 \right)$$

Sea $A = \begin{bmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & 3.1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ Hallar el mínimo valor de k entero tal que se verifica el criterio de Sylvester para la matriz A

(No se pide demostrar el Criterio, sólo aplicarlo)

c) Para el valor de k hallado en b) se considera el sistema $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.9 \\ 2 \end{pmatrix}$

Partiendo de $x^{(0)} = (0 , 0 , 0)^t$, aplique el algoritmo de gradiente conjugado hasta encontrar la solución. ¿Cuántas iteraciones realizó?

d) Haga el mismo número de iteraciones aplicando el algoritmo de Jacobi Calcular la norma 2 del último residuo y la norma 2 del último error.

e) Idem anterior usando el algoritmo de Gauss Seidel

(Detallamos a continuación la iteración del método de gradiente conjugado para resolver Ax = b , A simétrica, definida positiva :

1) $r^{(i)} = b - Ax^{(i)}$
2) $\beta_{i-1} = -(r^{(i)})^t Ap^{(i-1)} / (p^{(i-1)})^t Ap^{(i-1)}$ ($\beta_{-1} = 0$ al inicio)
3) $p^{(i)} = r^{(i)} + \beta_{i-1} p^{(i-1)}$ ($p^{(0)} = r^{(0)}$ al inicio)
4) $\alpha_i = (p^{(i)})^t r^{(i)} / (p^{(i)})^t Ap^{(i)}$
5) $x^{(i+1)} = x^{(i)} + \alpha_i p^{(i)}$
6) Incrementar i en 1 y volver a 1))

2) Se recuerda que el error en la interpolación polinómica vale:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots\ldots(x - x_n) \qquad \text{(I)}$$

donde c es una abscisa que pertenece al menor intervalo que contiene a $x , x_0 , x_1 , \ldots\ldots , x_n$

Considere la función sen(x) y los puntos de interpolación 0 , π /6 , π / 4 , π / 3

a) Halle el polinomio de interpolación de tercer grado para este caso.

b) Usando la fórmula trigonométrica $sen(x) = \sqrt{\dfrac{1 - \cos(2x)}{2}}$, calcule exactamente sen(π /8)

Con el resultado de a) evalue el polinomio de interpolación obtenido en $x = \pi/8$

c) Calcule una cota del error cometido usando (I). Compare con el error real. Verifique que el signo del error concuerda.
(Puede usarse el valor de π de la calculadora y la función raíz cuadrada para los cálculos)

3) a) Dada la ecuación diferencial (escalar) de orden n :
$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$ con las condiciones iniciales :
$y(x_0) = a_0$, $y'(x_0) = a_1$, $y''(x_0) = a_2$, ……., $y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$
transformarla en un sistema de primer orden apropiado.
Detalle con claridad las variables y la condición inicial de ese sistema

b) Considere la ecuación de segundo orden :
$y''+4x^2 y = -2sen(x^2) - 8x^3$ con las condiciones iniciales : $y(0) = 1, y'(0) = -2$
Hallar el valor de $y'(x^*)$ tal que $y(x^*)$ es 0 por primera vez en el intervalo [0,1]
(Use Método de Euler hacia delante con $\Delta x = 0.1$. Interpole linealmente para hallar el x^*)

c) Dada la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, defina error local y error global en una abscisa x_i generada por el método de resolución.
(Puede pensarlo por ejemplo con el método de Euler hacia delante)
Para la ecuación: $y' = 2y$, $y(0) = 1$, $\Delta x = 0.1$, con Euler hacia delante, hallar el error global en x = 1 y los errores locales en x = 0.2 , x = 0.5 , x = 0.8

d) Dada la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, hallar la región de estabilidad del método de resolución dado por :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$$

Puntajes : 1) 34 : a) 6 b) 6 c) 10 d) 6 e) 6
2) 33 : a) 13 b) 7 c) 13
3) 33 : a) 5 b) 12 c) 10 d) 6