Resolución examen de Métodos Numéricos 18 de Febrero de 2008
IMERL – Facultad de Ingeniería – UDELAR

Ejercicio 1.

a) A*B es una matriz m*p. La posición i,j del producto A*B vale:
$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{i,k} b_{k,j} = a_{i,1} b_{1,j} + a_{i,2} b_{2,j} + ... + a_{i,n} b_{n,j}$ para cuyo cálculo se requieren n productos y n -1 sumas, o sea 2n-1 operaciones.
Para el cálculo de A*B se requiere entonces de m*p*(2n-1) operaciones

b) A*(B*(C*D)) requiere 6*7*(2*5-1) + 4*6*(2*7-1) + 5*6*(2*4-1) = 900 flops
A*((B*C)*D) requiere 4*5*(2*7-1) + 4*6*(2*5-1) + 5*6*(2*4-1) = 686 flops
(A*B)*(C*D) requiere 5*7*(2*4-1) + 7*6*(2*5-1) + 5*6*(2*7-1) = 1013 flops
(A*(B*C))*D requiere 4*5*(2*7-1) + 5*5*(2*4-1) + 5*6*(2*5-1) = 705 flops
((A*B)*C)*D requiere 5*7*(2*4-1) + 5*5*(2*7-1) + 5*6*(2*5-1) = 840 flops
Por lo tanto la forma más económica de realizar este producto de matrices es :
A*((B*C)*D)

c) Con el siguiente programa podemos hacer la evaluación de p(x) usando la forma de Horner :

$px = a_n$
for i = (n-1):-1:0
$px = x * px + a_i$
end

El ciclo for se ejecuta n veces y la sentencia requiere de 2 operaciones.
Por tanto con este método la evaluación de p(x) requiere 2n operaciones.
Con el método convencional :
$a_n x^n$ requiere n productos , $a_{n-1} x^{n-1}$ requiere n - 1 productos , etc
Serían n + (n-1) + (n-2) + ….. + 2 + 1 productos , a los que hay que agregar n sumas. Serían en total : $\frac{n(n+1)}{2} + n$ operaciones. El método de Horner es ampliamente superior.
Incluso con una mejora del método convencional, donde vamos llevando en una variable las potencias de x, resultan más operaciones que con Horner:

$px = a_0$
$xp = x$
for i = 1:n
$px = px + a_i * xp$
$xp = xp * x$
end

El ciclo for se ejecuta n veces y dentro del ciclo realizo 3 operaciones, lo que dá como resultado 3n operaciones para evaluar p(x)

Ejercicio 2.

a) $$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \\ q(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \end{aligned}$$

$$p(-2) = 0 \Rightarrow a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 = 0$$
$$p(-1) = 0 \Rightarrow a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0$$
$$p(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$
$$q(0) = 0 \Rightarrow b_0 = 0$$
$$q(1) = 1 \Rightarrow b_0 + b_1 + b_2 + b_3 = 1$$
$$q(2) = 0 \Rightarrow b_0 + 2b_1 + 4b_2 + 8b_3 = 0$$
$$p'(0) = q'(0) \Rightarrow a_1 = b_1$$
$$p''(0) = q''(0) \Rightarrow 2a_2 = 2b_2$$

b) $$a_1 = b_1 = a \Rightarrow \begin{matrix} 2a_2 - 4a_3 = a \\ a_2 - a_3 = a \end{matrix} \Rightarrow a_2 = \frac{3}{2}a \ \ , \ a_3 = \frac{a}{2} \Rightarrow p(x) = ax + \frac{3}{2}ax^2 + \frac{a}{2}x^3$$

$$\begin{matrix} 2b_2 + 4b_3 = -a \\ b_2 + b_3 = 1 - a \end{matrix} \Rightarrow b_2 = \frac{4-3a}{2} \ \ , \ b_3 = \frac{a-2}{2} \Rightarrow q(x) = ax + \frac{4-3a}{2}x^2 + \frac{a-2}{2}x^3$$

c) $$a_2 = b_2 \Rightarrow \frac{3a}{2} = \frac{4-3a}{2} \Rightarrow a = 2/3 \Rightarrow \begin{matrix} p(x) = \frac{2}{3}x + x^2 + \frac{x^3}{3} \\ q(x) = \frac{2}{3}x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 \end{matrix}$$

Ejercicio 3

a) El desarrollo de Taylor de la solución $x(t)$ en torno de t_0 es :

$x(t_0 + h) = x(t_0) + \dot{x}(t_0)h + ...$

Despreciando los términos de de grado 2 en adelante y usando la condición inicial y la ecuación diferencial se obtiene la aproximación :

$x(t_0 + h) \approx x_0 + f(x_0, t_0)h$

b) Para ir de t_0 a t_1 en n pasos iguales se recorren los $n+1$ valores $t_0 + kh$, $k = 0,1,...,n$ donde el paso h es : $h = (t_1 - t_0)/n$ El primer valor x_0 lo dá la condición inicial y los restantes n se obtienen recursivamente usando una aproximación como la obtenida en a) : $x_{k+1} = x_k + f(x_k, t_o + kh)h$, $k = 0,1,......,n-1$

c) En este caso se tiene h = $1/n$, $x_0 = 1$, y la iteración es:

$x_{k+1} = x_k + hx_k \Rightarrow x_{k+1} = (1+h)x_k$, $k = 0,1,....,n-1$ Entonces:

$x_{k+1} = (1+h)x_k = (1+h)^2 x_{k-1} = ... = (1+h)^{k+1} x_0$

Por lo tanto : $x_k = (1 + 1/n)^k$, $k = 1,....,n$

d) La solución de la ecuación diferencial es obviamente $x(t) = e^t$. Como el último término x_n es la aproximación de $x(1)$ se obtiene: $e = x(1) \approx (1 + 1/n)^n$, $n \in N$