Examen de Métodos Numéricos 18 de Febrero de 2008

IMERL – Facultad de Ingeniería – UDELAR

Ejercicio 1.

a) Sean A y B matrices reales de dimensiones mxn y nxp . Determinar la cantidad de operaciones necesarias para calcular la matriz producto A*B (considerar suma y producto como "costando" lo mismo)

b) Se quiere calcular el producto A*B*C*D donde A, B, C, D son matrices reales de dimensiones 5x4, 4x7, 7x5 y 5x6 respectivamente.
Para cada una de las cinco maneras que hay de calcular este producto (una de ellas es (A*B)*(C*D)) determinar la cantidad de operaciones necesarias.
¿Cuál de ellas es la forma más económica de hacer este cálculo? Justificar

c) Un polinomio de grado n , $p(x) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$
se puede escribir en una forma equivalente como :
$a_0 + (a_1 + (a_2 + ...(a_{n-1} + a_n x)x).......)x$ (Forma de Horner)
Por ejemplo : $1 + 2x + 3x^2 + 5x^3 = 1 + (2 + (3 + 5x)x)x$
Hallar el número de operaciones necesarias para evaluar en un valor de x a un polinomio de grado n usando la forma de Horner. Comparar con el método convencional. (A la forma de Horner también se le llama Esquema de Ruffini)

Ejercicio 2.

Se busca $s : [-2,2] \to R$ definida por dos polinomios *p , q* cúbicos de acuerdo a

$$s(x) = \begin{cases} p(x) & \text{si } x \in [-2,0] \\ q(x) & \text{si } x \in [0,2] \end{cases}$$
, que tenga derivada segunda continua en [-2,2]

e interpole los puntos (-2,0) , (-1,0) , (0,0) , (1,1) , (2,0)

a) Escriba el sistema de ecuaciones que permite hallar los coeficientes de los polinomios *p* y *q*

b) Sea *a* la derivada de s en el origen (o sea $a = s'(0)$) . Hallar las expresiones de *p* y *q* en función de *a*

c) Determine el valor de *a* para que $s(x)$ satisfaga todas las condiciones requeridas.

Ejercicio 3.

Considere la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x,t)$ donde la incógnita $x=x(t)$ es una función real de variable real.

a) Con la condición inicial $x(t_0) = x_0$ y un paso h > 0 suficientemente pequeño deduzca la aproximación de $x(t_0 + h)$ con el método de Euler hacia delante

b) Considere ahora $t_1 > t_0$ y sea $n \in N$. Escriba la iteración que resuelve $\dot{x} = f(x,t)$ con el método de Euler hacia delante , a partir de la condición inicial $x(t_0) = x_0$ en n pasos iguales hasta $t = t_1$. Llame $x_0, x_1, ..., x_n$ a los sucesivos valores de la solución aproximada

c) Considere la parte b) aplicada al caso $\dot{x} = x$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $x(0) = 1$. Deduzca una expresión para x_k , $k = 0, 1, ..., n$ en función de *k* y de la cantidad de pasos *n*

d) Usando c) halle una aproximación del número *e* en función de *n*