Resolución examen de Métodos Numéricos 2 de Febrero de 2008
IMERL – Facultad de Ingeniería – UDELAR

Ejercicio 1.

Parte I

a) $d_0 = 1, d_1 = 0 \text{ ó } 1 \Rightarrow d_0 + d_1 2^{-1} = 1 \text{ ó } 1.5 \ , \ 2^e = 1/4 \ , \ 1/2 \ , \ 1 \ , \ 2$
Los números son: 0.25 , 0.375 , 0.5 , 0.75 , 1 , 1.5 , 2 y 3

b) 1.72 se representa en esta máquina con 1.5
0.79 con 0.75
1.5 + 0.75 = 2.25 , que se representa con 2
El valor que obtendremos es entonces 2

Parte II

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + f^{(3)}(x)\frac{h^3}{6} + f^{(4)}(x)\frac{h^4}{24} + f^{(5)}(x)\frac{h^5}{120} + ...$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} - f^{(3)}(x)\frac{h^3}{6} + f^{(4)}(x)\frac{h^4}{24} - f^{(5)}(x)\frac{h^5}{120} + ...$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2f'(x)h + 4f''(x)\frac{h^2}{2} + 8f^{(3)}(x)\frac{h^3}{6} + 16f^{(4)}(x)\frac{h^4}{24} + 32f^{(5)}(x)\frac{h^5}{120} + ...$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2f'(x)h + 4f''(x)\frac{h^2}{2} - 8f^{(3)}(x)\frac{h^3}{6} + 16f^{(4)}(x)\frac{h^4}{24} - 32f^{(5)}(x)\frac{h^5}{120} + ...$$

$$\Rightarrow \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3} = f^{(3)}(x) + f^{(5)}(x)\frac{h^2}{4} + ...$$

$$\Rightarrow \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3} = f^{(3)}(x) + f^{(5)}(\xi)\frac{h^2}{4}$$

Error = $f^{(5)}(\xi)\frac{h^2}{4}$ con $\xi \in [x-2h, x+2h]$

Ejercicio 2.

a) Si A es una matriz nxn :

$$|a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}| \qquad i = 1,2,......,n$$

b) La matriz de iteración J del método de Jacobi vale:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -a_{1,2}/a_{1,1} & . & -a_{1,n-1}/a_{1,1} & -a_{1,n}/a_{1,1} \\ -a_{2,1}/a_{2,2} & 0 & . & -a_{2,n-1}/a_{2,2} & -a_{2,n}/a_{2,2} \\ & & . \; . \; . & & \\ . & . & . \; . \; . & . & . \\ & & . \; . \; . & & \\ -a_{n-1,1}/a_{n-1,n-1} & -a_{n-1,2}/a_{n-1,n-1} & . & 0 & -a_{n-1,n}/a_{n-1,n-1} \\ -a_{n,1}/a_{n,n} & -a_{n,2}/a_{n,n} & . & -a_{n,n-1}/a_{n,n} & 0 \end{bmatrix}$$

Se tiene que $\|J\|_\infty = \max_i \{ \sum_{j\neq i} \left| -a_{i,j}/a_{i,i} \right| \} = \max_i \{ \frac{\sum_{j\neq i} |a_{i,j}|}{|a_{i,i}|} \} < 1$ pues A es estrictamente diagonal dominante por filas.

Como $\|J\|_\infty < 1$ se tiene que el método iterativo converge.

c) $|a+1| > 3$, $10 > |2a| + 1$, $|a-1| > 4$

Las condiciones son : $a < -4$ ó $a > 2$

$-4.5 < a < 4.5$

$a < -3$ ó $a > 5$

Resulta : $-4.5 < a < -4$

Ejercicio 3.

a) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

b) $J_f(x)$ es la jacobiana de f evaluada en x : $(J_f(x))_{i,j} = \dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$ (es una matriz nxn)

$$J_f(x^{(k)})s^{(k)} = -f(x^{(k)})$$
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$$

c) $J_f(x) = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - 2x_2 & 3x_2^2 - 2x_1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; J_f(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \; s^{(0)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1/8 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \; J_f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} -5/4 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \; s^{(1)} = \begin{pmatrix} -1/18 \\ -7/72 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.4444 \\ 0.9028 \end{pmatrix}, \; f(x^{(2)}) = \begin{pmatrix} 0.0212 \\ 0.0125 \end{pmatrix}$$

$$\left\| f(x^{(0)}) \right\|_2 = 1, \; \left\| f(x^{(1)}) \right\|_2 = 0.295, \left\| f(x^{(2)}) \right\|_2 = 0.0246$$