Examen de Métodos Numéricos 14 de diciembre 2007

Ejercicio 1:

i)
$$\begin{aligned} x^{(i+1)} &= -2y^{(i)} + 2z^{(i)} + 2 \\ y^{(i+1)} &= -x^{(i)} - z^{(i)} \\ z^{(i+1)} &= -2x^{(i)} - 2y^{(i)} + 1 \end{aligned}$$

Si $\hat{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Se tiene que la $\hat{x}^{(3)}$ es la solución exacta del problema

ii) $J = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ Hallamos los valores propios de J calculando su

polinomio característico = $\begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4 - 4 - 4\lambda + 2\lambda + 2\lambda = -\lambda^3$

0 es valor propio triple. Entonces radio espectral de J = 0 < 1 y el método de Jacobi converge

iii)
$$\begin{aligned} x^{(i+1)} &= -2y^{(i)} + 2z^{(i)} + 2 \\ y^{(i+1)} &= -x^{(i+1)} - z^{(i)} \\ z^{(i+1)} &= -2x^{(i+1)} - 2y^{(i+1)} + 1 \end{aligned}$$

Si considero la notación :

$(x^{(i+1)}, y^{(i+1)}, z^{(i+1)}) = (x', y', z')$, $(x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)}) = (x, y, z)$ resulta :

x’ = -2y + 2z +2

y’ = -x’ – z

z’ = -2x’ – 2y’ +1 Despejo x’, y’, z’ en función de x, y , z :

y’ = -x’ –z = 2y – 2z – 2 – z = 2y – 3z -2

z’ = -2x’ – 2y’ + 1 = -2 (-2y + 2z +2) -2 (2y – 3z -2) +1 = 2z +1

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de iteración G de Gauss Seidel es $G = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ cuyos

Valores propios son 0, 2 , 2. El radio espectral de G es 2 y por tanto el método no converge.

iv) Si se tiene el sistema Ax = b el método SOR se puede ver como considerar wAx = wb y particionar la matriz wA de la siguiente manera:

$$wA = \begin{pmatrix} wa_{1,1} & wa_{1,2} & wa_{1,3} \\ wa_{2,1} & wa_{2,2} & wa_{2,3} \\ wa_{3,1} & wa_{3,2} & wa_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ wa_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ wa_{3,1} & wa_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (w-1)a_{1,1} & wa_{1,2} & wa_{1,3} \\ 0 & (w-1)a_{2,2} & wa_{2,3} \\ 0 & 0 & (w-1)a_{3,3} \end{pmatrix}$$

wA = M(w) + N(w)

wAx = wb , (M+N)x = wb , Mx = -Nx + wb

El método iterativo es : Mx’ = -Nx + wb

Si w = 3/2 , aplicándolo al sistema resulta :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -3 & 3 \\ 0 & -1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix} \qquad \text{(I)}$$

Que se puede escribir como :

$$x^{(i+1)} = -(1/2)x^{(i)} - 3y^{(i)} + 3z^{(i)} + 3$$

$$y^{(i+1)} = -(3/2)x^{(i+1)} - (1/2)y^{(i)} - (3/2)z^{(i)}$$

$$z^{(i+1)} = -3x^{(i+1)} - 3y^{(i+1)} - (1/2)z^{(i)} + 3/2$$

Para ver si el método converge tenemos que hallar la matriz de iteración:

Despejamos en (I) las x’,y’, z’ en función de las x, y z :

Resulta: x’ = -(1/2)x -3y + 3z +3

y’ = (3/4)x + 4y - 6z -9/2

z’ = -(3/4)x – 3y +(17/2)z + 6

La matriz de iteración es $B = \begin{pmatrix} -1/2 & -3 & 3 \\ 3/4 & 4 & -6 \\ -3/4 & -3 & 17/2 \end{pmatrix}$

La traza de B vale -1/2 + 4 + 17/2 = 12

La suma de los valores propios de B es igual a 12

Si a, b y c son los valores propios de B se tiene:

12 = | traza | = | a + b + c | ≤ |a| + |b| + |c|

Por lo tanto algún valor propio tiene módulo mayor igual que 4, de donde radio espectral de B es mayor igual que 4 , por lo que este método no converge.

Ejercicio 2)

i) $y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)(x_{n+1} - x_n) +$ terminos de 2° orden

$y'(x_n) = f(x_n, y(x_n)) = f(x_n, y_n)$ y $x_{n+1} - x_n = h$

Esto sugiere el siguiente método :

$y_{n+1} = y_n + h.f(x_n, y_n)$ Método de Euler hacia delante

El problema test es : y' = qy

Si lo aplico al método resulta:

$y_{n+1} = y_n + h.q.y_n = (1+h.q)y_n \Rightarrow y_n = (1+h.q)^n y_0$

La región de estabilidad son los z (complejos), z = hq tales que la solución numérica permanece acotada.

En este caso resulta: $|1 + z| \leq 1$ (Círculo de radio 1 y centro en (-1,0))

ii) $y(x_n) = y(x_{n+1}) + y'(x_{n+1})(x_n - x_{n+1}) +$ terminos de 2° orden

$y'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) = f(x_{n+1}, y_{n+1})$ y $x_n - x_{n+1} = -h$

Esto sugiere el siguiente método :

$y_{n+1} = y_n + h.f(x_{n+1}, y_{n+1})$ Método de Euler hacia atrás

El problema test es : y' = qy

Si lo aplico al método resulta:

$$y_{n+1} = y_n + h.q.y_{n+1} \Rightarrow (1-h.q)y_{n+1} = y_n \Rightarrow y_{n+1} = \frac{y_n}{(1-h.q)} \Rightarrow y_n = \frac{y_0}{(1-h.q)^n}$$

La región de estabilidad son los z (complejos), z = hq tales que la solución numérica permanece acotada.

En este caso resulta: $|z - 1| \geq 1$ (Exterior del Círculo de radio 1 y centro en (1,0))

En la ecuación de este método la y_{n+1} se obtiene resolviendo un sistema no lineal (en general) o una ecuación no lineal (caso escalar).

Se puede hacer esto aplicando el método de Newton Raphson para resolver un sistema de ecuaciones no lineal, por ejemplo comenzando las iteraciones a partir de y_n

iii) El método del trapecio es: $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$

En la ecuación de este método la y_{n+1} se obtiene resolviendo un sistema no lineal (en general) o una ecuación no lineal (caso escalar).

Se puede hacer esto aplicando el método de Newton Raphson para resolver un sistema de ecuaciones no lineal, por ejemplo comenzando las iteraciones a partir de y_n

iv) $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(q.y_n + q.(y_n + h.q.y_n)) = (1 + h.q + \frac{(h.q)^2}{2})y_n$

$$\Rightarrow y_n = (1 + h.q + \frac{(h.q)^2}{2})^n y_0$$

Si z = hq resulta la región de estabilidad definida por : $\left|1 + z + \frac{z^2}{2}\right| \le 1$

Ejercicio 3)

Parte 1) Si la función $\varphi_r(t) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne r}}^{n} \alpha_i \varphi_i(t)$ entonces la columna r de la matriz A del problema de mínimos cuadrados es combinación lineal de las restantes columnas de la matriz A (cada columna de A está formada por las evaluaciones de las funciones φ en los valores $t_0, t_1, \ldots\ldots\ldots, t_m$)

O sea las columnas de A son LD (y el rango de A es < n) :

Si $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots\ldots, A^{(n)}$ son las columnas de A entonces: $A^{(r)} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne r}}^{n} \alpha_i A^{(i)}$

El núcleo de la matriz A es no trivial.

Existe z distinto del vector nulo tal que Az=0

(Por ejemplo z = $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_{r-1}, -1, \alpha_{r+1}, \ldots\ldots, \alpha_n)^t$ cumple esto).

Si $\hat{x}$ minimiza a $\|\text{Ax - Y}\|$ entonces $\|A(\hat{x}+z) - Y\| = \|A\hat{x} + Az - Y\| = \|A\hat{x} - Y\|$

Por lo tanto $\hat{x} + z$ también minimiza a $\|Ax - Y\|$ y como $z \ne \vec{0} \Rightarrow \hat{x} + z \ne \hat{x}$

La solución no es única (de hecho hay infinitas en este caso)

Parte 2)

a) Las ecuaciones normales son : $A^t Ax = A^t Y$

Si calculamos la posición r,s de la matriz $A^t A$ nos queda que intervienen los valores que aparecen en las columnas r y s de la matriz A

$$(A^t A)_{r,s} = \sum_{k=0}^{k=m} \varphi_r(t_k)\varphi_s(t_k) = \frac{1}{h}\sum_{k=0}^{k=m} \varphi_r(t_k)\varphi_s(t_k)h \approx \begin{cases} \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_m} \varphi_r(t)\varphi_s(t)dt = 0 & \text{si } r \ne s \\ \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_m} \varphi_r^2(t)dt = \frac{1}{h} & \text{si } r = s \end{cases}$$

O sea que $A^t A \approx \frac{1}{h} I_n$ donde I_n es la matriz identidad nxn

El sistema de las ecuaciones normales se comporta como el sistema:

$\frac{1}{h} I_n x = A^t Y$ y por lo tanto $x \approx h A^t Y$

b) Calculamos el número de condición de I usando por ejemplo la norma 2

$$cond_2(I) = \|I\|_2 . \|I^{-1}\|_2 = (\|I\|_2)^2$$

$$\|I\|_2 = \max_{\|x\|_2 \neq 0} \frac{\|I.x\|_2}{\|x\|_2} = \max_{\|x\|_2 \neq 0} \frac{\|x\|_2}{\|x\|_2} = 1 \quad \Rightarrow \quad cond_2(I) = 1$$

Al tomar un conjunto de funciones φ que son ortonormales (con el producto interno derivado de la integral del producto) se consigue que el número de condición de la matriz $A^t A$ sea cercano al número de condición de la matriz identidad n por n. O sea para esa elección de las funciones de ajuste el sistema dado por las ecuaciones normales resulta bien condicionado pues el número de condición de la matriz del sistema resulta ser próximo a 1.

(En las partes a) y b) se está usando que m >> 1 (m grande) para que las sumas de Riemann estén próximas a las integrales definidas respectivas)