Métodos Numéricos

IMERL - Facultad de Ingeniería - UDELAR

Examen del 14 de Diciembre de 2007

Ejercicio 1.

Dado el sistema:

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 2 \\ x + y + z &= 0 \\ 2x + 2y + z &= 1 \end{aligned}$$

i) Plantee el método de Jacobi para resolver el sistema anterior en forma iterativa. Haga 3 iteraciones del método partiendo del punto $(3, 2, 1)$.

ii) Hallar la matriz de iteración J del método de Jacobi del problema anterior. Calcular el radio espectral de J y probar que el método converge cualquiera sea la elección del punto inicial.

iii) Escriba el método de Gauss-Seidel para el sistema. Calcule la matriz de iteración G para este método y halle su radio espectral. ¿Es este método convergente?.

iv) Escriba el método de Sobrerelajación (SOR) para el sistema. Si $w = \frac{3}{2}$, ¿está garantizada la convergencia del método?.

SUGERENCIA: La traza de una matriz es igual a la suma de sus valores propios.

Ejercicio 2.

Dada la EDO:

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y),\ x \in [a, b] \\ y(x_0) &= c. \end{aligned}$$

i) Deducir el Método de Euler “Hacia adelante”, y determinar su región de estabilidad aplicándolo al Problema Test.

ii) Deducir el Método de Euler “Hacia atrás”, y determinar su región de estabilidad aplicándolo al Problema Test. Teniendo en cuenta que es un método implícito, describir como se aplica el método a un sistema no lineal (f es no lineal).

iii) Considerando que el Método del Trapecio es un método implícito, describir como se aplica el método si f es una función no lineal.

iv) Determinar la región de estabilidad del siguiente Método de Runge-Kutta:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + h \cdot f(x_n, y_n))\right).$$

Ejercicio 3.

Se tienen los siguientes datos,

t	y
t_0	y_0
t_1	y_1
t_2	y_2
...	...
t_m	y_m

Donde los t son de la forma $t_i = t_0 + ih$ para $i = 0 \dots m$, con $h = \frac{t_m - t_0}{m}$.

Y la siguiente función de ajuste,

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i(t)$$

Siendo $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ los parámetros de ajuste (con $m > n$)

Se desea ajustar la función $\Phi(\mathbf{x}, t)$ según el criterio de mínimos cuadrados.

Parte 1) Probar que si elegimos una familia de funciones $\{\varphi_i(t), i = 1 \dots n\}$ linealmente dependientes, por ejemplo,

$$\varphi_r(t) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{n} \alpha_i \varphi_i(t)$$

obtenemos un problema de mínimos cuadrados degenerados, o sea que la solución del problema no es única.

Parte 2)

a) Probar que si elegimos una familia de funciones $\{\varphi_i(t), i = 1 \dots n\}$ ortonormales en (t_0, t_m) o sea,

$$\text{Si } i \neq j \text{ entonces } \int_{t_0}^{t_m} \varphi_i(t)\varphi_j(t) = 0$$

$$\text{Y si } i = j \text{ entonces } \int_{t_0}^{t_m} \varphi_i(t)\varphi_j(t) = 1$$

Entonces para $m \gg 1$ se cumple que la solución del PMC $\mathbf{x} \simeq hA^T Y$.

SUGERENCIA: Escriba las ecuacíones normales, busque sumas de Riemann.

b) Usando la definición, deduzca el número de condición de la matriz identidad de tamaño $n \times n$. A partir de lo anterior y la Parte a), ¿puede explicar como se ve afectado el número de condición de las ecuaciones normales por la elección de las funciones de ajuste?