Métodos Numéricos

IMERL - Facultad de Ingeniería - UDELAR

Solución del examen del 4 de Agosto de 2007

1. Ejercicio

Parte 1) Paso iterativo del Método de Euler hacia delante:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf(y_i, t_i) \\ y_0 = y(0) \end{cases}$$

Comenzamos la iteración en $t = 0$ con $y(0) = 1$ y daremos pasos de largo constante e igual a $h = \frac{1}{n}$. En este caso $f(y, t) = y$ por lo tanto el paso iterativo se simplifica a,

$$y_{i+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) y_i$$

Por lo tanto dando n pasos llegamos a y_n que será nuestra aproximación de $y(1) = e$. Tenemos entonces,

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Paso iterativo del Método del trapecio:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(y_{i+1}, t_{i+1}) + f(y_i, t_i)) \\ y_0 = y(0) \end{cases}$$

De la misma manera que en los dos casos anteriores, el paso iterativo se simplifica a,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2n} y_{i+1} + \frac{1}{2n} y_i$$

Despejando y_{i+1},

$$y_{i+1} = \frac{2n+1}{2n-1} y_i$$

Nuevamente, sumando y restando 1 en el numerador obtenemos,

$$y_{i+1} = \left(1 + \frac{1}{n - \frac{1}{2}}\right) y_i$$

Y dando los n pasos deducimos la siguiente expresión,

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n - \frac{1}{2}}\right)^n$$

Parte 2) Error Local y Global del Método de Euler hacia delante:

Hacemos el desarrollo de Taylor de $y(t)$ de 2^o Orden en el punto t_i y lo evaluamos en $t = t_{i+1}$,

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + y'(t_i)(t_{i+1} - ti) + y''(\xi)\frac{(t_{i+1} - ti)^2}{2}$$

Con $\xi \in (t_i, t_{i+1})$. Llamando $h = t_{i+1} - t_i$ y observando que a partir de la ecuación diferencial sabemos que $y'(t_i) = f(y(t_i), t_i)$, entonces

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(y(t_i), t_i) + y''(\xi)\frac{h^2}{2}$$

Con lo cual el Error Local del método de Euler hacia delante es de orden 2. Y dado que el Error Global es de un orden menos que el Error Local, el Método de Euler hacia delante tiene Error Global de Orden 1.

Error Local y Global del Método del trapecio:

Hacemos los desarrollos de Taylor de $y(t)$ de 3^o orden en los puntos t_i y t_{i+1}.

$$y(t_i) = y(t_{i+1}) + y'(t_{i+1})(t_i - t_{i+1}) + y''(t_{i+1})\frac{(t_i - t_{i+1})^2}{2} + y'''(\xi)\frac{(t_i - t_{i+1})^3}{3!}$$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + y'(t_i)(t_{i+1} - ti) + y''(t_i)\frac{(t_{i+1} - ti)^2}{2} + y'''(\eta)\frac{(t_{i+1} - t_i)^3}{3!}$$

Con η y ξ en (t_i, t_{i+1}). Restándolos y llamando $h = t_{i+1} - t_i$, obtenemos

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \frac{h}{2}(f(y(t_{i+1}), t_{i+1}) + f(y(t_i), t_i)) + R(h)$$

Siendo

$$R(h) = y'''(\eta)\frac{h^3}{3!} + y'''(\xi)\frac{h^3}{3!} - \frac{y''(t_{i+1}) - y''(t_i)}{2h}h^3$$

Y aplicando el TVM al cociente de las derivadas segundas, llegamos a

$$R(h) = (\frac{y'''(\eta)}{3!} + \frac{y'''(\xi)}{3!} - \frac{y'''(\mu)}{2})h^3$$

Entonces sabemos que el Error Local es de orden 3 y por lo tanto el error Global es de orden 2.

Parte 3) Al representar la operación $1 + \frac{1}{n}$ en punto flotante, obtenemos,

$$PF\left[1 + \frac{1}{n}\right] = (1+\delta)(1 + \frac{1}{n})$$

Entonces al hacer el producto de los n términos e ignorando el error en esas operaciones, obtenemos

$$PF\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] \simeq PF\left[1 + \frac{1}{n}\right]^n = (1+\delta)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Y por lo tanto el error absoluto debido a las operaciones en punto flotante es aproximadamente,

$$\Delta_{PF} = \left|PF\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right| \simeq |(1+\delta)^n - 1| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Ahora usamos la sugerencia y el hecho que $|\delta| \leq \epsilon_{mach}$ y llegamos a que,

$$\Delta_{PF} \leq (n\epsilon_{mach}) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Parte 4) A partir de las partes anteriores, el error total para una sucesión a_{in} cualquiera con error global de orden k es aproximadamente,

$$E_{Total}(n) \leq \frac{1}{n^k} + n\epsilon_{mach}$$

Por lo tanto derivando e igualando a cero,

$$\frac{\partial}{\partial n} E_{Total}(n) = -\frac{k}{n^{k+1}} + \epsilon_{mach} = 0$$

Y el n optimo sale de la ecuación anterior,

$$n_{opt} = \sqrt[k+1]{\frac{k}{\epsilon_{mach}}}$$

La mejor sucesión para aproximar **e** es a_{2n} ya que ésta para un mismo n tiene una cota de error de punto flotante igual a la de a_{1n} y menor cota de error de truncamiento.

2. Ejercicio

   a) Explique para qué se utilizan los métodos de interpolación. En el caso de interpolación de Lagrange y Hermite (de orden 1), escriba la base (o una base posible) de polinomios para el método, y plantee el sistema lineal que debe resolverse para hallar los coeficientes del interpolante (*).

Los métodos de interpolación sirven en general para conseguir aproximaciones a valores desconocidos de una función, dada una tabla de valores conocida.

En el caso de interpolación de Lagrange, dados los datos $\{(x_i, y_i)\}_{1\leq i\leq n}$, la base de polinomios es la siguiente:

$$l_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{i=n} (\frac{x - x_j}{x_i - x_j})$$

Los coeficientes son los y_i por lo que el sistema lineal a resolver es $Id \cdot c = y$ (no hay nada que resolver).

En el caso de interpolación de Hermite de primer orden, lo que se le pide al polinomio interpolante es que $p(x_i) = y_i$ (1) y $p'(x_i) = y_i'$ (2). La base más sencilla (no teniendo en cuenta problemas costo o errores) es la canónica.

Si se tienen los datos $\{(x_i, y_i, y_i')\}_{1\leq i\leq n}$ entonces habría que tomar la base (de 2n elementos) como:

$$B = \{1, x, x^2, \dots, x^{2n-1}\}$$

Entonces, $p(x) = \sum_{i=0}^{2n} c_i \cdot x^{i-1}$ y $p'(x) = \sum_{i=0}^{2n-1} (i-1) \cdot c_i \cdot x^{i-2}$. Al imponer las condiciones (1) y (2), aparecen las matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} x_1^{2n-1} & x_1^{2n-2} & \dots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^{2n-1} & x_2^{2n-2} & \dots & x_2^2 & x_2 & 1 \\ & & . & & & \\ & & . & & & \\ & & . & & & \\ x_n^{2n-1} & x_n^{2n-2} & \dots & x_n^2 & x_n & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} (2n-1)x_1^{2n-2} & (2n-2)x_1^{2n-3} & \dots & 2x_1 & 1 & 0 \\ (2n-1)x_2^{2n-2} & (2n-2)x_2^{2n-3} & \dots & 2x_2 & 1 & 0 \\ & & . & & & \\ & & . & & & \\ & & . & & & \\ (2n-1)x_n^{2n-2} & (2n-2)x_n^{2n-3} & \dots & 2x_n & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ . \\ . \\ y'_n \end{pmatrix}$$

Siendo $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, el sistema a resolver para hallar los c_i es $Ac = b$.

b) Demuestre que en ambos casos el polinomio interpolante es único o no existe.

En el caso de que un valor de x_i aparezca dos veces con distintas y_i o y'_i el polinomio no existirá porque ninguna función puede tener más de una imagen para x_i.

Supongo que no pasa eso.
En el caso del interpolante de Lagrange, los coeficientes son los y_i, y tener los coeficientes de p respecto de una base del espacio de polinomios de orden n, es tener el polinomio determinado de forma única.

En el caso del interpolante de Hermite, hay que ver que el sistema lineal a resolver sea compatible determinado. Se puede probar que las columnas de A son L.I.

Sean $\{A^i\}_{1 \leq i \leq 2n}$ las columnas de A. Entonces si no fueran L.I., existirían $\{d_i\}_{1 \leq i \leq 2n}$ tales que $\sum_{i=1}^{i=2n} d_i \cdot A_i = 0$.
La fila j-ésima de esa sumatoria es un polinomio de coeficientes d_i, grado $\leq 2n - 1$, evaluado en x_j, e igualado a cero.

Como hay 2n filas, eso implicaría que existe un polinomio de grado menor o igual a 2n-1 con 2n raíces distintas $\Rightarrow$ ABSURDO. Entonces las columnas de A son L.I.

c) La siguiente tabla contiene puntos de la función de Runge ($f(x) = \frac{1}{25x^2+1}$). Halle el polinomio interpolante por el método de Lagrange y estime la función de Runge en 0,1 y 0,9, a partir del mismo.

x_i	$f(x_i)$
$0,0$	$1,0$
$0,5$	$0,1$
$1,0$	$0,04$

Los polinomios l_i quedan:
$l_1(x) = 2x^2 - 3x + 1$
$l_2(x) = -4x^2 + 4x$
$l_3(x) = 2x^2 - x$

Después:

$p(x) = 2x^2 - 3x + 1 + (0,1)(-4x^2 + 4x) + (0,04)(2x^2 - x) = (1,68)x^2 - (2,64)x + 1$

$$p(0,1) = 0,7708$$

$$p(0,9) = -0,0152$$

d) Usando que la fórmula de la función es conocida, calcule el error relativo en los puntos $x_1 = 0,1$ y $x_2 = 0,9$.
¿Qué técnica de interpolación podría utilizarse para solucionar el problema de que sean tan distintos?

$$R(0,1) = 0,8 \Rightarrow \delta_{0,1} = \frac{0,8 - 0,7708}{0,8} = 0,036 = 3,6\div$$

$$R(0,9) = 0,047 \Rightarrow \delta_{0,9} = \frac{0,047 + 0,0152}{0,047} = 0,678 = 67,8\div$$

Se podría usar interpolación a trozos.
Otra posible solución sería conseguir datos de la función en puntos no equiespaciados, pero tendrían que ser elegidos cuidadosamente si se quieren buenos resultados.

(*)Nota parte (a): En el caso de interpolación de Hermite elija la base que le parezca más sencilla para los cálculos, sin tener en cuenta el costo o los errores computacionales.

3. Ejercicio

Ver teórico de Mínimos Cuadrados.