Métodos Numéricos

IMERL - Facultad de Ingeniería - UDELAR

Examen del 4 de Agosto de 2007

Ejercicio 1.

Sabemos que la solución de la ecuación diferencial: (I) $\begin{cases} y'(t) = y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$, es $y(t) = e^t$.

En este ejercicio se obtendrán aproximaciones del número **e** (constante de Euler) a partir de la ecuación diferencial anterior y los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales vistos en el curso. A su vez se obtendrán cotas de los errores cometidos en dichas aproximaciones.

Parte 1) A partir de la ecuación diferencial (I) y los métodos: Euler hacia delante y Método del trapecio; deduzca las siguientes aproximaciones de e:

$$a_{1n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, a_{2n} = \left(1 + \frac{1}{n - \frac{1}{2}}\right)^n.$$

Parte 2) Halle los órdenes de los errores locales de los métodos usados en la **Parte 1)** y luego a partir de éstos halle los órdenes de los errores globales.

Parte 3) Halle una cota para el error de operación en punto flotante para alguna de las a_n (será igual para cualquiera de ellas).

<u>Observación:</u> Considere solamente el error de punto flotante cometido al sumar 1 y la fracción.

SUGERENCIA:
Para simplificar la cota tome en cuenta que si $x \ll 1$ entonces $(1 + x)^n \simeq 1 + nx$.

Parte 4) A partir de la **Parte 2)** y la **Parte 3)**, para cada a_n, halle el n_{optimo}. Siendo éste el n que minimiza el error total (numérico más truncamiento). A partir de lo visto, ¿cuál sucesión usaría ud. para evaluar una aproximación del número **e**?

Ejercicio 2.

a) Explique para qué se utilizan los métodos de interpolación. En el caso de interpolación de Lagrange y Hermite (de orden 1), escriba la base (o una base posible) de polinomios para el método, y plantee el sistema lineal que debe resolverse para hallar los coeficientes del interpolante (*).

b) La siguiente tabla contiene puntos de la función de Runge ($f(x) = \frac{1}{25x^2+1}$). Halle el polinomio interpolante por el método de Lagrange y estime la función de Runge en 0,1 y 0,9, a partir del mismo.

x_i	$f(x_i)$
$0,0$	$1,0$
$0,5$	$0,1$
$1,0$	$0,04$

c) Usando que la fórmula de la función es conocida, calcule el error relativo en los puntos $x_1 = 0,1$ y $x_2 = 0,9$.
¿Qué técnica de interpolación podría utilizarse para solucionar el problema de que sean tan distintos?

(*) Nota parte (a): En el caso de interpolación de Hermite elija la base que le parezca más sencilla para los cálculos, sin tener en cuenta el costo o los errores computacionales.

Ejercicio 3.

Dado un Problema de Mínimos Cuadrados:

$$\text{(PMC)}\ min_x \|b - Ax\|_2,$$

con $A \in R^{m\times n}$, $b \in R^m$, $x \in R^n$, con $m > n$.
Se pide:

a) Deduzca la Ecuaciones Normales correspondiente al PMC.

b) i) ¿Qué es la descomposición QR de una matriz $A \in R^{m\times n}$?.
   ii) ¿Explique como se puede utilizar la descomposición QR para resolver el PMC?.

c) i) ¿Qué es la descomposición SVD (descomposición en valores singulares) de una matriz $A \in R^{m\times n}$?.
   ii) Asumiendo conocida la descomposición SVD de la matriz A, brinde una expresión para la única solución del problema PMC, para la cual $\|x\|_2$ es mínima.