Métodos Numéricos

IMERL - Facultad de Ingeniería - UDELAR

Solución - Examen del 16 de Febrero de 2007

Ejercicio 1.

Parte 1 Dado el método $x_{k+1} = Qx_k + C$ con x_0 como punto inicial, y sea α el punto fijo de dicho método, con lo cual se verifica $\alpha = Q\alpha + C$, entonces:

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1} - \alpha\| &= \|Q(x_k - \alpha) + C - C\| \\
&= \|Q(x_k - \alpha)\| \\
&\leq \|Q\|\|x_k - \alpha\| \\
&\ \ ... \\
&\leq \|Q\|^{k+1}\|x_0 - \alpha\|
\end{aligned}$$

Y como $\|Q\| < 1$, por lo tanto

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \|x_{k+1} - \alpha\| \leq \lim_{k\to\infty} \|Q\|^{k+1}\|x_0 - \alpha\| = 0$$

Con lo cual x_{k+1} converge a α.

Parte 2 Ver teórico de Métodos Iterativos.

Parte 3 Escribiendo la matriz A del sistema lineal $Ax = b$ como $A = D+L+U$, donde D es diagonal, L es triangular inferior y U es triangular superior, entonces:

$$Dx_{k+1} + (L + U)x_k = b$$

Y por lo tanto el paso iterativo del método de Jacobi resulta:

$$x_{k+1} = -D^{-1}(L + U)x_k + D^{-1}b$$

De lo anterior resulta que $M = D$ ya que

$$M^{-1}(M - A) = D^{-1}(D - (D + L + U)) = -D^{-1}(L + U)$$

Ejercicio 2.

Parte 1 Ver teórico de Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Parte 2 Asumimos que la matiz A es invertible. Luego suponemos que existen dos descomposiciones LU de la matriz A, por lo tanto $A = L_1U_1$ $A = L_2U_2$.

Tenemos entonces que, $L_1U_1 = L_2U_2$ y dado que A es invertible se cumple,

$$L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$$

El siguiente razonamiento se hará para el lado izquierdo de la igualdad y es análogo para el derecho.

Dado que la matriz inversa de una triangular inferior es también triangular inferior y que el producto de triangulares inferiores es triangular inferior, entonces la matriz D siendo $D = L_2^{-1}L_1$ es triangular inferior.

De la misma manera del lado derecho de la ecuación se concluye que la matriz D, al ser igual también a $U_2U_1^{-1}$, es triangular superior.

El hecho de que D sea triangular superior e inferior a la vez implica que D es una matriz diagonal.

Como los elementos de la diagonal de L_1 son iguales a 1 y también los de la matriz L_2^{-1}, entonces del producto de dichas matrices surge que los elementos diagonales de D son iguales a 1. Siendo D entonces la matriz identidad con lo cual la descomposición es única dado que,

$$L_1 = L_2 \text{ y } U_1 = U_2$$

Parte 3 El orden de operaciones debido a escalerizar un sistema de $n \times n$ mediante Escalerización Gaussiana genérica es igual a $\frac{n^3}{3}$. Las sustituciones hacia delante o atrás tienen orden igual a $\frac{n^2}{2}$.

Por lo tanto el orden de operaciones de escalerizar m sistemas con Escalerizacion Gaussiana es, $m\frac{n^3}{3}$.

Mientras que hacer la descomposición LU y luego una sustitución hacia adelante y otra hacia atrás por cada término independiente distinto tiene orden $\frac{n^3}{3} + mn^2$.

Ejercicio 3.

Parte 1 El problema de mínimos cuadrados no lineales se puede resolver con el método de Gauss-Newton. Ver teórico de Mínimos Cuadrados para la deducción.

Parte 2 Dado que $\gamma = \alpha^2$ tenemos que,

$$g(\mu) = \alpha - \sqrt{\frac{\mu}{\beta} + \alpha^2}$$

Hallando la función inversa de g, llegamos a que

$$g^{-1}(\omega) = \beta w^2 - 2\alpha\beta\omega$$

Por lo tanto ajustamos la función $h(w) = c_1 w^2 + c_2 w$ a los datos por medio de mínimos cuadrados, luego una vez hallados c_1 y c_2 hallaremos α y β usando las relaciones que surgen de igualar los coeficientes de los polinomios de g^{-1} y h.

$$\beta = c_1$$
$$\alpha = -\frac{c_2}{2c_1}$$

El problema de mínimos cuadrados lineales que queda planteado se resuelve de la siguiente manera:

Sea W la columna ω de datos y U la columna μ de datos, el vector de parámetros es

$$x = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

La matiz A queda definida como

$$A = \begin{bmatrix} W^2 & W \end{bmatrix}$$

Finalmente para hallar x hay que resolver el sistema lineal $A^T A x = A^T U$

Parte 3 Solución:

$c_1 = -0{,}5899$ y $c_2 = 0{,}9959$

Por lo tanto $\alpha = 0{,}8441$ y $\beta = -0{,}5899$