Métodos Numéricos

IMERL - Facultad de Ingeniería - UDELAR

Solución del examen del 3 de Febrero de 2007

1. Ver Teórico del Curso de Métodos Numéricos sobre Ecuaciones Diferenciales

2. *a)* Es un método de la forma $x_{k+1} = g(x_k) \Rightarrow$ para lograr la mejor velocidad de convergencia habría que tratar de minimizar $|g'(\alpha)|$ (donde α es el punto fijo). En este caso es posible hacer que $|g'(\alpha)| = 0$ con lo que el orden de convergencia pasa a ser por lo menos 2:

$$g'(\alpha) = 1 + m \cdot [1 - f'(\alpha)] = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{f'(\alpha) - 1}$$

   b) i) Con la misma notación que en (a),

$$g(x) = x + \frac{1}{f'(\sqrt{2}) - 1} \cdot [x - \frac{2}{x}] = \frac{1}{2} \cdot (x + \frac{2}{x})$$

(La fórmula clásica para hallar la raíz cuadrada ...)

$$g'(x) = \frac{1}{2} + \frac{-1}{x^2} \Rightarrow g'(\sqrt{2}) = 0$$

$$g''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow g'(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Entonces el orden de convergencia es 2 y la velocidad es $\frac{g''(\sqrt{2})}{2!} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Para la región de convergencia planteo:

$$|g'(x)| < 1 \Rightarrow |\frac{1}{2} + \frac{-1}{x^2}| < 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{-1}{x^2} < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{-1}{x^2} > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 < -1 \\ x > \sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases} \Rightarrow x > \sqrt{\frac{2}{3}} \tag{1}$$

ii) Hay que elegir $x_0 > \sqrt{\frac{2}{3}}$ para asegurar la convergencia $\Rightarrow x_0 = 1,5$.

El código del método es muy sencillo, lo que puede causar problemas es encontrar la cantidad de iteraciones necesarias:

$$x_{k+1} = g(x_k) \Rightarrow x_{k+1} = g(\alpha) + g'(\alpha) \cdot (x_k - \alpha) + \frac{g''(\xi)}{2!} \cdot (x_k - \alpha)^2$$

En este caso $g'(\alpha) = 0$ y siempre $g(\alpha) = \alpha$ entonces queda:

$$x_{k+1} - \alpha = \frac{g''(\xi)}{2!} \cdot (x_k - \alpha)^2$$

$g''(x) = \frac{2}{x^3}$ que en $[1,2]$ está acotada por M=2. Entonces

$$|x_{k+1}-\alpha| = \frac{M}{2}\cdot(x_k-\alpha)^2 = (\frac{M}{2})^2\cdot(x_{k-1}-\alpha)^4 = \ldots = (\frac{M}{2})^{2(k+1)}\cdot(x_0-\alpha)^{2(k+1)}$$

.

Así que, acotando $|x_0 - \alpha|$ (en este caso $x_0 = 1,5$ y sé que $|x_0 - \alpha| < 0,5$ porque $\alpha \in [1,2]$), llego a:

$$|x_k - \alpha| < (0,5)^{2(k)} \Rightarrow k \geqslant \frac{1}{2} \cdot \log_{0,5} 10^{-}5$$

Es decir que con 9 iteraciones se asegura haber llegado al resultado.

c) Realizando la aproximación $f'(\alpha) \approx f'(x_k)$, el método queda como sigue:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{f'(x_k) - 1} \cdot [x_k - f(x_k)] \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}$$

Es decir que se está aplicando el método de Newton Raphson para resolver $F(x) = 0$. Deducir el método por otro camino es un problema teórico.

3. $L_{N,k}(x)$ es un polinomio de grado N, por lo tanto

$$\sum_{k=0}^{N} L_{N,k}(x) - 1$$

es un polinomio de grado menor o igual a N que tiene $N+1$ raíces $\{x_k\}_{k=0}^{N}$. Entonces usando la sugerencia este debe ser el polinomio nulo y la afirmación queda demostrada.