Métodos Numéricos

IMERL - Facultad de Ingeniería - UDELAR

Examen del 3 de Febrero de 2007

Ejercicio 1.

Se considera una ecuación diferencial (EDO) $y' = f(t, y)$ con $t, y \in I\!R$. Se aproxima la EDO con una ecuación en diferencias finitas (EDF) $y_{n+1} = G(h_n, t_n, t_{n+1}, y_n, y_{n+1})$ en donde $h_n = t_{n+1} - t_n$.

i) Defina como es G para los métodos de Euler explícito y Euler implícito.

ii) ¿Cuándo se dice que el método de aproximación dado por la EDF es consistente con la EDO? ¿A qué se llama orden del método dado por la EDF?

iii) ¿Cuándo decimos que el método dado por la EDF es estable? Estudiar la estabilidad del método de Euler explícito para la ecuación $y' = qy$ con q una constante.

iv) Análogamente estudiar la estabilidad del método de Euler implícito para la ecuación $y' = qy$ con q una constante.

Ejercicio 2.

a) Se quiere resolver una ecuación de la forma $x = f(x)$, donde $f : D \to C$ es una función conocida, C^2 y calculable para puntos arbitrarios de su dominio.

   Como la ecuación no admite soluciones analíticas conocidas, se propone un método iterativo de la siguiente forma:

$$x_{k+1} = x_k + m \cdot [x_k - f(x_k)]$$

   Hallar el valor de $m \in \mathbb{R}$ para que el método sea "lo más rápido posible" en cuanto a su convergencia.

b) Se quiere hallar $\sqrt{2}$ como solución de la ecuación $x = \frac{2}{x}$. Usando el método de la parte (a) con el m óptimo hallado. Se pide:

   i) Hallar el orden, velocidad y región de convergencia.

   ii) Escriba el código (o pseudocódigo) de una función que calcule $\sqrt{2}$ con un error menor a 10^{-5} (recuerde que debe elegir el punto inicial de forma de asegurar la convergencia del método). No es necesario que calcule una condición de parada exacta.

Calcule el número de iteraciones necesarias para asegurar que su función llegue al resultado con la precisión pedida.

SUGERENCIA: La función que define la iteración del método es C^∞ en $[1, 2]$. Para hallar una condición de parada puede buscar una cota para la (o las) derivada(s) que necesite.

c) Ahora se quiere hallar la solución α de la ecuación

$$x = f(x)$$

donde no se conoce $f'(\alpha)$. Se propone aproximarla de la siguiente forma: $f'(\alpha) \approx f'(x_k)$ para cada x_k en cada iteración. Escriba el método resultante y muestre una deducción alternativa del mismo. **SUGERENCIA: Considere $F(x) = x - f(x)$.**

Ejercicio 3.

Consideremos los polinomios de Lagrange que surgen en el problema de interpolación:

$$L_{N,k}(x) = \frac{\Pi_{j=0,j\neq k}^{N}(x - x_j)}{\Pi_{j=0,j\neq k}^{N}(x_k - x_j)}$$

Pruebe que $\sum_{k=0}^{N} L_{N,k}(x) = 1\ \forall x \in R$.

SUGERENCIA: Dado un polinomio $P(x)$ de grado q con $q + 1$ raíces, entonces necesariamente $P(x)$ es el polinomio nulo.