Métodos Numéricos

IMERL - Facultad de Ingeniería - UDELAR

Examen del 14 de Diciembre de 2006

Ejercicio 1.

Parte 1 Explique en que se diferencian los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales explícitos e implícitos.

Parte 2 Deduzca la expresión general del Método del Trapecio, para la EDO general

$$\frac{\partial}{\partial t}y(t) = f(y(t), t)$$
$$y(t0) = y_0$$

Deberá ser clara la nomenclatura usada para la solución exacta y la aproximación numérica.

Parte 3 En base a la expresión hallada en la parte anterior clasifique el Método del Trapecio en función de lo discutido en la Parte 1.

Parte 4 Se quiere hallar dos métodos prácticos alternativos para resolver la EDO general planteada anteriormente iterando con el Método del Trapecio.

Por lo tanto deberá solucionar la limitación práctica de que el método caiga en la categoría hallada en la Parte 3 de dos maneras distintas. Explique cada una y genere para cada caso un esquema del procedimiento ideado.

SUGERENCIA: En un caso podría usar el método de Euler Hacia Adelante y en el otro podría usar Newton-Raphson.

Ejercicio 2.

Se sabe que la respuesta de un sistema es de la forma:

$$y(t) = \alpha + \alpha e^{-\beta t}.$$

Se ensayó la respuesta del mismo y se obtuvo una tabla $(t_i, y_i)_{i=1..N}$ con la respuestas del sistema en N instantes de tiempo t_i .
Explique un método que permita determinar los parametros α y β mediante mínimos cuadrados. Deberá deducir **todas** las ecuaciones necesarias para implementar el método.

Ejercicio 3.

Parte 1 Se sabe que un cierto número $F \in I\!R$, se aproxima, en función de h por $T(h)$ tal que

$$T(h) = F + c_1 h^{p_1} + c_2 h^{p_2} + \cdots + c_k h^{p_k} + \cdots .$$

Explique en qué consiste el método de extrapolación de Richardson para la aproximación de F.

Parte 2 La fórmula de Simpson para evaluar numéricamente $\int_a^b f(x)dx$ está dada por

$$T(h) = \frac{h}{3} \cdot (f_0 + 4S_1 + 2S_2 + f_{2m}) \ ,$$

donde dividimos el intervalo $[a, b]$ en un número par $2m$ de subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$ todos de la misma longitud $h = \frac{(b-a)}{2m}$, con $f_0 = f(x_0) = f(a)$,

$$f_j = f(x_j), \ S_1 = f_1 + f_3 + \cdots + f_{2m-1}, \ S_2 = f_2 + f_4 + \cdots + f_{2m-2} \, .$$

Escribir un algoritmo (Matlab o pseudo código) que calcule $\int_0^b e^{-x^2/2}dx$ usando la fórmula de Simpson $T(h)$.

Parte 3 Si f es de clase $C^5[a, b]$, el error cometido por la fórmula de Simpson es

$$|\int_a^b f(x)dx - T(h)| \approx \frac{(b-a)}{180} M h^4 + K h^5$$

con $M \leq \text{máx}\{|f^{(4)}(x)| : x \in [a, b]\}$ y $K \leq \text{máx}\{|f^{(5)}(x)| : x \in [a, b]\}$. Escribir un algoritmo (Matlab o pseudo código) que utilice la fórmula de extrapolación de Richardson para mejorar la aproximación de $\int_0^b e^{-x^2/2}dx$ obtenida en el ítem anterior.