Solución del examen de MetNum Agosto 2006

Ejercicio 1.

Consideremos el problema de valor inicial (problema de Cauchy):

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [a, b]; \\ y(t_0) = y_0, & t_0 \in [a, b]. \end{cases}$$

donde la función f tiene derivadas parciales de primer orden continuas.

1. Para resolver este problema, desde punto de vista numérico, se obtiene una sucesión $\{y_k\}_{k=1,2,3,...}$ dada en forma recurrente, que aproxima a la verdadera solución en algunos puntos llamados nodos. Escriba claramente las sucesiones engendradas por los métodos de Euler y del trapecio.

   Solución: Definamos la sucesión finita de nodos $\{t_k : t_k = a + kh\}_{k=0}^{k=n}$ siendo $h = \frac{b-a}{n}$. Sea y_k la aproximación obtenida para $y(t_k)$

   Método de Euler

   $$\begin{cases} y_0 = y(t_0) \\ y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \quad \text{con } k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

   Método del trapecio

   $$\begin{cases} y_0 = y(t_0) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})\right), \quad \text{con } k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

2. En este contexto surgen los llamados métodos implícitos y métodos explícitos, explique la diferencia entre ambos y clasifique los métodos de Euler y del trapecio según este criterio.

   Solución: Un método se llama explícito cuando y_{k+1} depende solamente de los anteriores términos de la sucesión, en particular del inmediato anterior y_k, y se llama implícito cuando depende de sí mismo a través de f. Así, el método de Euler es explícito y el del trapecio es implícito.

3. El siguiente algoritmo es conocido como el método de Heun, h es una constante positiva dada:

   $$\begin{cases} p_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), & t_{k+1} = t_k + h; \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, p_{k+1})) \end{cases}$$

   Justificar el método de Heun y decidir si es implícito o explícito (Sugerencia: tener en cuenta los métodos de Euler y del trapecio).

Solución: El algoritmo de Heun es del tipo predictor-corrector, predice el valor de y_{k+1} utilizando el método de Euler y luego lo utiliza en el algoritmo del trapecio, obteniendo de esta forma un método explícito, la razón para hacer esto es aumentar el orden de convergencia del algoritmo de Euler y evitar el problema de resolver, para la obtención de y_{k+1}, en cada paso, una ecuación implícita que es en general no lineal.

4. Dado el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{-y(t)+t}{2}, & t \in [0,3]; \\ y(0) = 1, & t_0 \in [0,3]. \end{cases}$$

Hallar la solución analítica de este problema y la sucesión engendrada por el método de Heun (usar $h = 1$). Luego, encontrar el error relativo de $y(3)$ respecto de su aproximación.

Solución: Resolvemos y resulta :$y(t) = 3e^{\frac{-1}{2}t} + t - 2$ con $t \in [0,3]$.

(el siguiente resultado está hecho con MATLAB y corre bien)

```
soluc = 1.0000    0.8196    1.1036    1.6694

p =               0.5000    0.9375    1.5859

y =     1.0000    0.8750    1.1719    1.7324
```

El error relativo es: $|(1.7324-1.6694)/1.6694| = 0.0377$ es decir, del 3.77%

5. Definir el problema test y deducir que la región de estabilidad del método de Heun es $\left\{z = h\lambda \in \mathbb{C} : \left|1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2}\right| < 1\right\}$.

Solución: El problema test se define como la siguiente ecuación diferencial:

$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ con $t > 0$ y $\lambda \in \mathbb{C}$

La región de estabilidad se define así:

$\{z = \lambda h \in \mathbb{C} : |y_k| \to 0 \text{ cuando } t_k \to +\infty\}$

En el problema test $f(t,y) = \lambda y$, entonces: $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left((\lambda y_k) + (\lambda(y_k + h\lambda y_k))\right)$, entonces $y_{k+1} = (1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2})y_k$ y resulta la condición que se pide.

Ejercicio 2.

1) Agrupando todo "lo que tiene x^{k+1}" de un lado y "lo que tiene x^k" del otro y haciendo operaciones se llega a:

$$B = (Id + wL)^{-1} \cdot [(1-w)Id - wU]$$

y

$$c = (Id + wL)^{-1} \cdot D^{-1} \cdot wb$$

2) $det(B) = det((Id + wL)^{-1}) \cdot det((1-w)Id - wU)$

   $det((Id + wL)^{-1}) = 1$ porque $(Id + wL)$ es triangular inferior "con unos" en la diagonal y el determinante de la inversa es también uno (además es invertible porque sus filas son LI).

   $det((1-w)Id - wU) = (1-w)^n$ porque $(1-w)Id - wU$ es triangular superior con $(1-w)$ en cada elemento de la diagonal.

   $\Rightarrow det(B) = (1-w)^n$

   además, suponiendo B diagonalizable, se deduce que $det(B) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ donde λ_i son los valores propios de B.

   $\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = (1-w)^n$ y debe existir algún λ_i tal que $\mid \lambda_i \mid \geq \mid (1-w) \mid$

   Como $\mid \lambda_i \mid < 1$ para que el método converja, tiene que ser $\mid (1-w) \mid < 1$ y se deduce la tesis.

3) $x^k - x = x^k - x^{k+1} + x^{k+1} - x = -B(x^k - x^{k-1}) + B(x^k - x)$ entonces

$$\| x^k - x \| \leq \| B \| \cdot \| x^k - x^{k-1} \| + \| B \| \cdot \| x^k - x \|$$
$$\Rightarrow \| x^k - x \| \leq \frac{\| B \|}{1 - \| B \|} \cdot \| x^k - x^{k-1} \|$$

Ejercicio 3.

1) Se debe minimizar la norma 2 al cuadrado del residuo (diferencia) entre $f(x)$ y $ax+b$.

$$\min_{(a,b)} \|f(x)-(ax+b)\|_2^2 = \min_{(a,b)} \left(\int_{x_0}^{x_1} (f(x)-(ax+b))^2 dx \right)$$

2) i) Llamemos $h(a,b)$ a la función a minimizar. Calculando el gradiente de $h(a,b)$ igual a 0 la primera ecuación es:

$$\frac{\partial}{\partial a} \int_0^1 (e^x-(ax+b))^2 dx = 0$$

La segunda ecuación es:

$$\frac{\partial}{\partial b} \int_0^1 (e^x-(ax+b))^2 dx = 0$$

Eso nos da el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}a + b = 2 \\ a + 2b = 2e - 2 \end{cases}$$

$$H_h = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Al resolverlo $(\hat{a},\hat{b}) = (18-6e, 4e-10)$ y como $Det(H_h) = \frac{1}{3}$ y $Tr(H_h) = \frac{8}{3}$ se encontró un mínimo.

ii) La norma del residuo es igual a:

$$\begin{aligned} \|e^x-(\hat{a}x+\hat{b})\|_2 &= \sqrt{\int_0^1 (e^x-(\hat{a}x+\hat{b}))^2 dx} \\ &= \sqrt{-\frac{7}{2}e^2+20e-\frac{57}{2}} \\ &\simeq 0.0632 \end{aligned}$$