Métodos Numéricos

IMERL - Facultad de Ingeniería - UDELAR

Examen del 5 de Agosto de 2006

Ejercicio 1.

Consideremos el problema de valor inicial (problema de Cauchy):

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [a, b]; \\ y(t_0) = y_0, & t_0 \in [a, b]. \end{cases}$$

donde la función f tiene derivadas parciales de primer orden continuas.

1) Para resolver este problema, desde el punto de vista numérico, se obtiene una sucesión $\{y_k\}_{k=1,2,3,\dots}$ dada en forma recurrente, que aproxima a la verdadera solución en algunos puntos llamados nodos. Escriba claramente las sucesiones engendradas por los métodos de Euler y del trapecio.

2) En este contexto surgen los llamados métodos implícitos y métodos explícitos, explique la diferencia entre ambos y clasifique los métodos de Euler y del trapecio según este criterio.

3) El siguiente algoritmo es conocido como el método de Heun, h es una constante positiva dada:

$$\begin{cases} p_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), & t_{k+1} = t_k + h; \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, p_{k+1})) & \end{cases}$$

Justificar el método de Heun y decidir si es implícito o explícito (Sugerencia: tener en cuenta los métodos de Euler y del trapecio).

4) Dado el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{-y(t)+t}{2}, & t \in [0, 3]; \\ y(0) = 1, & t_0 \in [0, 3]. \end{cases}$$

Hallar la solución analítica de este problema y la sucesión engendrada por el método de Heun (usar $h = 1$). Luego, encontrar el error relativo de $y(3)$ respecto de su aproximación.

SUGERENCIA: Al resolver la ecuación diferencial busque una solución particular de tipo polinómica.

5) Definir el problema test y deducir que la región de estabilidad del método de Heun es $\left\{z = h\lambda \in \mathbb{C} : \left|1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2}\right| < 1\right\}$.

Ejercicio 2.

Considere el sistema lineal $A.x = b$ con A matriz $n \times n$ invertible. A tiene término general a_{ij} y b, x tienen componentes b_i y x_i respectivamente.
Se considera el siguiente método iterativo para resolver el sistema:

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \frac{w \cdot (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{k+1} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} \cdot x_j^k)}{a_{ii}}$$

con $w \in \mathbb{R}$.

1) Plantee el método con la forma general de un método iterativo estacionario ($x^{k+1} = B \cdot x^k + c$). ¿Qué método es el que se está aplicando si w = 1?
SUGERENCIA: Considere $A = D \cdot (L + Id + U)$ donde D es diagonal y L, U son triangulares inferior y superior respectivamente.

2) Demuestre que si w no pertenece al conjunto $U = (0, 2)$ el método es necesariamente **NO** convergente. Puede suponerse que la matriz B hallada en la parte a) es diagonalizable.
SUGERENCIA: Calcular el determinante de B de varias formas. Recordar que el determinante de una matriz diagonalizable es igual al de la matriz diagonalizada. Y que el determinante de matrices diagonales, triangular superiores o triangular inferiores es igual al producto de los elementos de la diagonal.

3) Se quiere realizar un programa que implemente este método. Halle una condición de parada en función de B y $\| x^k - x^{k-1} \|$ para que el error ($\varepsilon = \| x^k - x \|$) sea menor que una cierta tolerancia (tol).

Ejercicio 3.

Suponga que tiene una función dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x)$ y que usted sabe que en el intervalo $[x_0, x_1]$ la función tiene un andamiento similar al de una función lineal. Dado lo anterior, sería útil encontrar una función lineal $ax + b$ que aproxime a $f(x)$ en el intervalo $[x_0, x_1]$, con el fin de trabajar con la aproximación lineal en vez de la función misma.

1) Plantee como un problema de minimización el problema de encontrar los coeficientes de la función lineal $ax + b$ tal que ésta aproxime a la función $f(x)$ de la mejor manera según el criterio de Mínimos Cuadrados. Usando que la norma del espacio de funciones es $\|g(x)\|_2^2 = \int_{x_0}^{x_1} g(x)^2 dx$

2) i) Ahora asuma que $f(x) = e^x$ y que el intervalo de interés es $[0, 1]$. Halle los valores de a y b para el problema definido en la parte anterior. Se deberá usar la SUGERENCIA.

   ii) Calcule también el la norma del residuo entre la aproximación lineal hallada y la función $f(x)$.

   SUGERENCIA: Necesitará usar que si $(\hat{x}, \hat{y})$ es un punto mínimo de la función $h(x, y)$ entonces se debe verificar que $\nabla h(\hat{x}, \hat{y}) = (0, 0)$ y que, siendo $H_h(x, y)$ la matriz Hessiana de la función $h(x, y)$, $Det(H_h(\hat{x}, \hat{y})) > 0$ y $Tr(H_h(\hat{x}, \hat{y})) > 0$.