Examen de Métodos Numéricos, marzo de 2006.

Ejercicio 1

Se tiene que $x^{(k+1)} = \dfrac{1}{1+\omega}\left(P^{-1}\left(N+\omega P\right)x^{(k)} + P^{-1}b\right)$

Si $x^{(*)}$ es solución de $Ax=b$, entonces: $x^{(*)} = \dfrac{1}{1+\omega}\left(P^{-1}\left(N+\omega P\right)x^{(*)} + P^{-1}b\right)$

Se deduce que $\left\|x^{(k+1)} - x^{(*)}\right\| \le \left\|\dfrac{1}{1+\omega}.\left(P^{-1}N+\omega I\right)\right\|.\left\|x^{(k)} - x^{(*)}\right\|$

Entonces los valores propios de $\dfrac{1}{1+\omega}.\left(P^{-1}N+\omega I\right)$ deben ser de módulo menor que 1.
Si v_i es vector propio de $P^{-1}N$ asociado al valor propio λ_i, entonces:

$\dfrac{1}{1+\omega}.\left(P^{-1}N+\omega I\right)v_i = \dfrac{\lambda_i+\omega}{1+\omega}.v_i$, luego debemos exigir que $\left|\dfrac{\lambda_i+\omega}{1+\omega}\right| < 1$ para todo i.

Resulta que $\omega > -\dfrac{1+\lambda_n}{2}$.

Ejercicio 2

1.

Hay que usar mínimos cuadrados, ya que no se puede usar una única función interpolante exponencial que pase por los 5 puntos.

2.

Buscamos una $f(t) = a \,.\, e^{b.t}$ que se ajuste a los valores de la tabla.

Tomando logaritmo en ambos lados de la igualdad, tenemos:
$L(f(t)) = L(a \,.\, e^{bt}) = L(a) + b.t$

Sea $c = L(a)$. El problema se transformó entonces en encontrar los valores de b y c que minimicen $\| L(y) - c - b.t \|$ para los valores de t y L(y) de la tabla.

En notación matricial, busco

$$\min_{\{b,c\}}\left\{\left\|\begin{pmatrix} L(2) \\ L(6) \\ L(7) \\ L(17) \\ L(30) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 15 \\ 1 & 30 \\ 1 & 45 \\ 1 & 60 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}\right\|\right\} = \min_{\{b,c\}}\left\{\left\|\begin{pmatrix} 0{,}693 \\ 1{,}792 \\ 1{,}946 \\ 2{,}833 \\ 3{,}401 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 15 \\ 1 & 30 \\ 1 & 45 \\ 1 & 60 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}\right\|\right\}$$

Las ecuaciones normales quedan entonces de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 15 & 30 & 45 & 60 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 15 \\ 1 & 30 \\ 1 & 45 \\ 1 & 60 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 15 & 30 & 45 & 60 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0{,}693 \\ 1{,}792 \\ 1{,}946 \\ 2{,}833 \\ 3{,}401 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 150 \\ 150 & 6750 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10{,}665 \\ 416{,}820 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}842 \\ 0{,}043 \end{pmatrix}$$

Por la definición de c, tenemos que $a = e^c = 2{,}321$, por lo que $f(t) = 2{,}321 \,.\, e^{0{,}043.t}$.

Los valores de f para los t pedidos son entonces $f(5) = 2{,}877$ y $f(35) = 10{,}454$.

Redondeando, se espera que en t = 5 hayan 3 individuos y en t = 35 hayan 10 individuos.

Otra forma de hallar los valores de a y b es usando Gauss-Newton.

Ejercicio 3

Parte 1

a)

Tengo una serie de datos de la forma (t_i, y_i) para i = 1…n.

Quiero ajustar dichos datos a una función de t de la cual conozco todo menos ciertos parámetros $a_1,...,a_p$. Llamemos a dicha función $f(t,a_1,...,a_p)$.

O sea, quiero encontrar los valores $a_1,...,a_p$ para los cuales $\sum_{i=1}^{i=n}(y_i - f(t_i,a_1,...,a_p))^2$ sea mínimo.

b)

Sean $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$, $F(a) = \begin{pmatrix} f(t_1,a_1,...,a_p) \\ f(t_2,a_1,...,a_p) \\ \vdots \\ f(t_n,a_1,...,a_p) \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ y $R(a) = F(a) - y$

Notar que $\|R(a)\|^2 = \sum_{i=1}^{i=n}(y_i - f(t_i,a_1,...,a_p))^2$, por lo que minimizar $\|R(a)\|$ es equivalente a solucionar el problema.

Desarrollo R usando Taylor:
$R(a+\Delta a) = R(a) + JR(a).\Delta a + o(2)$, donde o(2) es el resto de Taylor.

Ignorando el resto de Taylor y partiendo de un cierto $a^{(n)}$, minimizar $\|R(a^{(n)} + \Delta a^{(n)})\|$ equivale a encontrar el $\Delta a^{(n)}$ que minimiza $\|R(a^{(n)}) + JR(a^{(n)}).\Delta a^{(n)}\|$, y esto es un problema de mínimos cuadrados lineal. Obtengo así un $a^{(n+1)} = a^{(n)} + \Delta a^{(n)}$. Notar que $R(a) = F(a) - y$, y que $JR(a) = JF(a)$.

El algoritmo de Gauss-Newton es entonces el siguiente:

Elijo a condición inicial, e inicializo $\Delta a \leftarrow \infty$
Mientras que $\|\Delta a\| >$ tolerancia
 Encuentro el Δa que minimice $\|JF(a).\Delta a + F(a) - y\|$ usando mínimos cuadrados lineales
 Actualizo $a \leftarrow a + \Delta a$

c)

```
function [a1, a2] = gn(t, y, a1i, a2i, tol)

a = [a1i; a2i];
da = inf;

while norm(da) > tol
    F = a(1) * exp(2 * a(2) * t);
    JF = [ exp(2 * a(2) * t), 2 * a(1) * t .* exp(2 * a(2) * t) ];
    da = JF' * JF \ JF' * (y - F);
    a = a + da;
end

a1 = a(1);
a2 = a(2);
```

Parte 2

a)

Tengo una serie de datos de la forma (t_i, y_i) para i = 1…n ($t_i < t_{i+1}$).

Quiero encontrar una función f:[t_1, t_n] → R tal que f(t_i) = y_i, i = 1…n.

b)

La técnica de splines cúbicos es una técnica de interpolación a trozos, por lo que la función f será de la forma:

$f(t) = p_i(t)$, $t_i \le t \le t_{i+1}$, i = 1…n – 1.

Para que la función esté bien definida y cumpla con lo requerido, tiene que cumplirse que
$p_i(t_{i+1}) = p_{i+1}(t_{i+1}) = y_{i+1}$ para i = 1…n – 2.
$p_{n-1}(t_n) = y_n$.

En el caso de splines cúbicos, las $p_i(t)$ son funciones polinómicas de grado menor o igual a 3, y $f(t)$ es de clase C^2, por lo que también se cumple que:

$$\frac{\partial p_i(t_{i+1})}{\partial t} = \frac{\partial p_{i+1}(t_{i+1})}{\partial t}$$ para i = 1…n – 2.

$$\frac{\partial^2 p_i(t_{i+1})}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p_{i+1}(t_{i+1})}{\partial t^2}$$ para i = 1…n – 2.

Imponiendo finalmente los valores (arbitrarios) de $\frac{\partial^2 p_1(t_1)}{\partial t^2}$ y de $\frac{\partial^2 p_{n-1}(t_n)}{\partial t^2}$,
tenemos determinados los n – 1 polinomios $p_i(t)$. El caso en que estos valores valgan ambos 0 se llama “splines natural”.