# Métodos Numéricos - Curso 2005

**IMERL - Facultad de Ingeniería - UDELAR**

Examen del 4 de Febrero de 2006

## Ejercicio 1.

Dados los siguientes datos:

| t | y |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 3 | 4 |
| 6 | 6 |

a) Planteando el ajuste de los datos anteriores por mínimos cuadrados a una función lineal de la forma:
$y(t, x_0, x_1) = x_0 + t \cdot x_1$, donde llamaremos: $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$; deducir las ecuaciones normales minimizando la función $F : R^2 \to R$ tal que $F(x) = ||A \cdot x - Y||_2^2$ (ver SUGERENCIAS). Siendo $A$ e $Y$ las matrices y vectores que se obtienen de plantear el método de mínimos cuadrados.
b) Resuelva luego las ecuaciones normales y calcule el valor del residuo.
c) Explique como haría el ajuste utilizando la descomposición $QR$ de la matriz $A$.

SUGERENCIAS:

- Hallar la expresión de la función $F$ (norma del residuo al cuadrado) para los datos del problema.
- Dada $F : R^2 \to R$, $F(x)$ tiene un extremo local en $\hat{x}$ si $\nabla F(x)_{|x=\hat{x}} = \vec{O}$.
- Dada $F : R^2 \to R$, si $F(x)$ tiene un extremo local en $\hat{x}$ y el determinante y la traza de la matriz Hessiana son positivos entonces $\hat{x}$ es un mínimo local.

## Ejercicio 2.

Dado un sistema lineal expresado de la forma $Ax = b$, un método iterativo que lo resuelva se puede expresar genericamente como:

$$M \cdot x^{(k+1)} = (M - A) \cdot x^{(k)} + b,\ k = 0, 1, \ldots.$$

a) Asumiendo $M$ invertible y denotando $Q = M^{-1} \cdot (M - A)$, demostrar que una condición **necesaria y suficiente** para que el método iterativo sea convergente es que el radio espectral de $Q$ sea menor que 1.
b) Dadas la siguientes matrices, determinar en cada caso la matriz $M$ para el método de Gauss-Seidel y determinar si Gauss-Seidel es convergente:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -7 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{6} & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -\frac{1}{10} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## Ejercicio 3.

Considere la ecuación diferencial:

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = f(y, x) \\ y(0) = \alpha \end{array} \right. \tag{1}$$

a) Deduzca y explique el método de Euler (hacia adelante).

b) Defina el error local y encuentre una expresión para este en el caso del método de Euler.

c) Defina error global y encuentre una cota para el mismo. Podrá considerar el método de Euler para la deducción del error global.