

Problema 1

Se desea interpolar los datos (x_i, y_i) , $i = 0 \dots n$ mediante una función continua.

1. (8 puntos) Explique el método de interpolación polinómica global y deduzca todas las ecuaciones necesarias para calcular el polinomio interpolante.
2. (4 puntos) Comente las ventajas y desventajas del método de la parte anterior.
3. (8 puntos) Encuentre el interpolante polinómico para los datos $(1, 1), (2, 0), (3, 1), (4, 3)$.
4. (15 puntos) Para trabajar con polinomios de menor grado se propone el uso de interpolantes a trozos. En cada intervalo $[x_i, x_{i+1})$ se utiliza un polinomio $p_i(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Se desea que el interpolante sea continuo y con derivadas primera y segunda continuas. Mostrar que se puede construir una solución a este problema de interpolación con un polinomio de grado menor o igual a tres. Considere además que $p'_0(x_0) = d_0$ y $p'_{n-1}(x_n) = d_n$.

Problema 2

Dado el sistema lineal $Ax = b$ con A matriz $n \times n$ no singular, se propone encontrar su solución mediante un método iterativo.

1. (6 puntos) Deduzca el método de Jacobi.
2. (8 puntos) Demuestre una condición (sobre la matriz A) suficiente para la convergencia del método de Jacobi. Enuncie claramente los resultados utilizados.
3. (6 puntos) Se propone modificar el método de Jacobi de la siguiente manera:

$$x^{k+1} = \omega(Qx^k + c) + (1 - \omega)x^k \quad \omega > 0 \quad (1)$$

con Q y c correspondientes al método de Jacobi y ω real. Demuestre que si x es solución del sistema $Ax = b$ también es solución de (1).

4. (15 puntos) Encuentre la condición que deben cumplir ω y el radio espectral de Q para que (1) sea convergente. Sugerencia: Escriba (1) de forma conveniente y recuerde la condición necesaria y suficiente para que un método iterativo sea convergente.

Problema 3

Se quiere obtener numéricamente la derivada de una función f mediante la expresión:

$$\Delta f = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

1. (4 puntos) Defina el epsilon de la máquina.
2. (10 puntos) Halle el error de truncamiento.
3. (10 puntos) Estime el error de redondeo debido al uso de aritmética de punto flotante.
4. (6 puntos) Estime el error total y el h óptimo.