

## Problema 1

Considere  $g : R \rightarrow R$  diferenciable con punto fijo  $\alpha$  y el método iterativo  $x_{k+1} = g(x_k)$  con punto inicial  $x_0$ .

1. **(15 puntos)** Demuestre que si:  $x_0 \in I = \{x \in R : |x - \alpha| < \rho\}$  y  $|g'(x)| < 1$  en  $I$ ,  $x_k$  converge a  $\alpha$ .
2. **(5 puntos)** Dada una función  $f : R \rightarrow R$  con derivada primera continua, deduzca el método de Newton-Raphson para resolver  $f(x) = 0$  y haga una representación gráfica del mismo.
3. **(10 puntos)** Demuestre que eligiendo convenientemente el punto inicial  $x_0$ , el método de Newton-Raphson es siempre convergente.
4. **(10 puntos)** Defina orden y velocidad de convergencia. Discuta el orden de convergencia de Newton-Raphson agregando las hipótesis necesarias sobre  $f$ . Deberá enunciar claramente los resultados utilizados.

## Problema 2

Considere la ecuación diferencial:

$$\begin{cases} y' = f(y, x) \\ y(0) = \alpha \end{cases} \quad (1)$$

1. **(7 puntos)** Integre la ecuación (1) para obtener el método del trapecio. Indique claramente la nomenclatura utilizada (como define la solución real en  $x$ , como la aproximación numérica, etc.).
2. **(5 puntos)** Escriba un código completo que implemente el método del trapecio. Considere un paso de avance  $h$  fijo.
3. **(10 puntos)** Defina el problema test. Halle y grafique la región de estabilidad para el método del trapecio.
4. **(8 puntos)** Se desea resolver el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$Y' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} Y \quad Y(0) = (1, 1)^t;$$

Encuentre el paso de avance  $h$  que garantiza la estabilidad numérica.

## Problema 3

Se sabe que la respuesta de un sistema es de la forma:

$$y(t) = \alpha(1 - e^{-\beta t})$$

Se ensayó la respuesta del mismo y se obtuvo una tabla  $(t_i, y_i)_{i=1 \dots N}$  con las respuestas del sistema en  $N$  instantes de tiempo  $t_i$ .

1. **(30 puntos)** Explique un método que permita determinar los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  mediante mínimos cuadrados. Deberá deducir **todas** las ecuaciones necesarias para implementar el método.