1 Solución de ejercicio 1

a) Ver teórico.

b) Ver teórico.

c) Como $D = I$, $r = b = (0, 1, 1)^t$ y $Q = D - A$. (D es la matriz diagonal de A).

d) Calculamos

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Por lo que tenemos que $Q^{2m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^m & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix}, \forall m > 0$. Tomando $e^0 = (0, 1, 0)$ se consigue $e^{2m} = Q^{2m}e^0 = (0, 4^m, 0)$, que no converge al vector nulo.

e) La matriz de Jacobi relajado es $Q_{JOR}(w) = wQ + (1 - w)I$. Si λ es valor propio de Q, entonces $\lambda' = w\lambda + 1 - w$ es valor propio de Q_{JOR}. Los valores propios de Q son 0, 2 y -2. Entonces, los valores propios de Q_{JOR} son $1 - w$, $1 + w$ y $1 - 3w$. El requisito $|1 + w| < 1$ implica $w < 0$, y el requisito $|1 - w| < 1$ implica $0 < w < 2$, por lo que no existe relajación convergente.

2 Solución de ejercicio 2

a) Ver teórico.

b) Queremos hallar el polinomio interpolante de $f(x) = e^x$, por las $n + 1$ abscisas equiespaciadas: $x_i = i/n$, $i = 0, \dots, n$. En la base de Lagrange:

$$p_n(x) = f(x_0)l_0(x) + \ldots + f(x_n)l_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_i(x);$$

siendo l_i el polinomio i-ésimo de la base de Lagrange, definido como:

$$l_i(x) = \frac{\prod_{j=0,j\neq i}^{n} (x - x_j)}{\prod_{j=0,j\neq i}^{n} (x_i - x_j)}, \quad \forall\ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Usando esto, el polinomio interpolante por los $n+1$ puntos es:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} e^{i/n} \frac{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x - j/n)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (i/n - j/n)}.$$

c) Por el Teorema del error de interpolación polinómica:

$$\forall\ x \in [0,1],\ \exists\ \theta_x \in [0,1]\ /\ |f(x) - p_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\theta_x)|}{(n+1)!} \prod_{i=1}^{n} |x - x_i|\,.$$

En este caso $f^{(n+1)}(x) = e^x$. Esta función es creciente, por lo que su valor máximo en el intervalo $[0,1]$ se alcanza en $x = 1$:

$$|f^{(n+1)}(x)| = e^x \leq e^1,\ \forall\ x \in [0,1].$$

Por otro lado: $|x - x_i| \leq 1,\ \forall\ x, x_i \in [0,1]$. Por lo tanto:

$$|p_n(x) - f(x)| \leq \frac{e^1}{(n+1)!} 1^n = \frac{e}{(n+1)!},\ \forall\ x \in [0,1].$$

Tomando máximo de ambos lados, se obtiene:

$$E_n = \max_{x\in[0,1]} |p_n(x) - f(x)| \leq \frac{e}{(n+1)!}.$$

d) En la parte anterior probamos que se cumple:

$$|p_n(x) - f(x)| \leq \frac{e}{(n+1)!},\ \forall\ x \in [0,1]. \tag{1}$$

Tomando límite a ambos lados de la desigualdad, se obtiene:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |p_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{e}{(n+1)!} = 0,\ \forall\ x \in [0,1].$$

Esto prueba que la sucesión de polinomios interpolantes $\{p_n\}$, converge puntualmente a la función f, al aumentar la cantidad de puntos de interpolación. Para ver que la convergencia es uniforme, basta con notar que la cota de la Ecuación (1) no depende del punto $x \in [0,1]$.

3 Solución de ejercicio 3

a) Ver teórico.

b) Newton-Rapshon es un MIG con $g(X) = X - \mathbb{J}_f(X)^{-1} f(X)$.

Las siguientes son tres condiciones suficientes para garantizar que X_k converge a α si X_0 está suficientemente cerca de α.

- g es una r-contracción en un entorno de α.
- g es diferenciable y existe una norma matricial y un número m tal que $||\mathbb{J}_g(x, y)|| \leq m < 1$ para todo (x, y) en un entorno de α.
- $g \in \mathbb{C}^1$ y existe una norma matricial tal que $\|\mathbb{J}_g(\alpha)\| < 1$.

$X^{(0)}$	$X^{(1)}$
0	1
0	0.250

Tenemos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x + 2y^2 - 1, 1 - 4y)$ y se quiere hallar $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(\vec{\alpha}) = \vec{0}$.

El método N-R puede escribirse como:

$$\begin{cases} X^{(k+1)} = & X^{(k)} - \mathbb{J}_F(X^{(k)})^{-1} F(X^{(k)}) \\ X^{(0)} \in & \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Para evitar hallar la matriz inversa resolvemos el sistema $\mathbb{J}_f(X^{(k)})S^{(k)} = -f(X^{(k)})$, con lo que $X^{(k+1)} = X^{(k)} + S^{(k)}$. La matriz jacobiana en un punto genérico es

$$\mathbb{J}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 4y \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Primero se halla $S^{(0)}$ resolviendo el sistema $\mathbb{J}_f(X^{(0)})S^{(0)} = -f(X^{(0)})$. Luego se calcula $X^{(1)} = X^{(0)} + S^{(0)}$.

$\mathbb{J}_f(0, 0)S^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -f(0, 0)$.

Resolviendo el sistema obtenemos $S^{(0)} = (1, 0.250)^t$, por tanto

$$X^{(1)} = (0, 0)^t + (1, \tfrac{1}{4})^t = (1, 0.250)^t$$

d) Para $1-4y=0$ debe ser $y=0.250$, luego $x=0.875$. La raíz exacta es entonces

$$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}0.875\\0.250\end{pmatrix}$$

Para analizar la convergencia de NR a dicha raíz se considera:

$$g(X)=X-\mathbb{J}_f(X)^{-1}f(X)=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & y\\0 & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x+2y^2-1\\1-4y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2y^2-y+1\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

Luego se calcula

$$\mathbb{J}_g(X)=\begin{pmatrix}0 & 4y-1\\0 & 0\end{pmatrix}$$

y por tanto,

$$\mathbb{J}_g(\alpha)=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

con lo cual se tiene $\|\mathbb{J}_g(\alpha)\|<1$ para cualquier norma matricial, lo cual garantiza convergencia de NR a la raíz para todo X_0 suficientemente próximo a α.

Una buena elección a priori para X_0 será un X_0 suficientemente cercano a α, de modo que se cumpla una condición suficiente de convergencia y tengamos la tranquilidad de que la sucesión $X^{(k)}$ convergerá a α.

Para ver si $(0,0)$ es una buena elección para X_0, vemos si existe m y una norma matricial tal que $|||\mathbb{J}_g(0,0)|||\leq m<1$ (es claro que $g\in\mathbb{C}^1$).

Observar que el radio espectral de $\mathbb{J}_g(0,0)$ es 0.

Observemos que cuando hablamos de "buena elección "nos referimos a elegir un X_0 que a priori nos garantice la convergencia de la sucesión.

Un X_0 para el que no hay garantías a priori no necesariamente es un mal X_0, solamente es un X_0 sobre el cual no estamos seguros de antemano.