Métodos Numéricos - Curso 2001
Instituto de Matemática (IMERL)

Examen 1 de febrero del 2002

1. Se dispone de un conjunto de observaciones $\{(t_i, y_i), i = 1, ..., n\}$, las que se quieren aproximar por una función de la forma $f(t) = \alpha + \beta t$.

   (a) Explique en que consiste el criterio de aproximación de mínimos cuadrados.

   (b) Deduzca las ecuaciones normales.

   (c) Dados los datos:

t_i	0	1	2
y_i	1.0	2.8	3.9

   encuentre los valores de α y β.

   (d) Para mejorar la aproximación se plantea usar la función $g(t) = \alpha + \beta t + \sin(\omega t)$. Si se sabe que el valor óptimo de los parámetros (α, β, ω) es cercano a $(\alpha_0, \beta_0, \omega_0)$, explique el algoritmo de Gauss-Newton para resolver el problema. Escriba un código Matlab. (Obs.: no se pide resolver el problema numéricamente.)

2. Considere una tabla $\{(x_i, y_i), i = 1, ..., n\}$ de los valores de una función.

   (a) Explique en que consiste la interpolación polinómica y un método para hallar el polinomio interpolante. Compare con la interpolación mediante una función lineal a trozos.

   (b) Deduzca la expresión para el error de interpolación.

   (c) Para la siguiente tabla de valores de la función $f(x) = \sin(x)$:

x_i	0	1	2	3
y_i	0	0.84	0.91	0.14

   halle la expresión del error de interpolación, y una buena cota superior para el mismo en el intervalo [0 3].

3. Suponga que se desea calcular la derivada segunda de la función $f(x)$ en un valor x dado usando la expresión:

   $$D_2 f(h) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

   (a) Halle el error cometido, distinguiendo los errores de truncamiento y de redondeo (debido a las operaciones en punto flotante.) Obs.: suponga que x, $x-h$, $x+h$, h^2 y $f(\cdot)$ tienen representación exacta en punto flotante y que el cociente se calcula en forma exacta.

   (b) Discuta el valor de h óptimo.

   (c) Si ya calculó los valores de $D_2 f(h)$ y $D_2 f(h/2)$, ¿cómo usa estos valores para obtener una mejor aproximación de la derivada segunda de f? (Suponga que para el valor de h elegido el error de redondeo es despreciable frente al error de truncamiento).