Métodos Numéricos - Curso 2001
Instituto de Matemática (IMERL)

Solución examen diciembre del 2001

1. (a) El error de truncamiento se debe a la aproximación de y' por un esquema de diferencias ($y'(x) \approx \frac{y(x+h)-y(x)}{h}$). El error esta dado por los términos del desarrollo que se desprecian. El error de redondeo es el error debido a la realización de las operaciones en punto flotante.

(b)

$$y' = f(y, x)$$

$$y' = \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

y_n es la solución numérica en $x_n = x + nh$.

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n, x_n)$$

Alternativamente, se puede deducir integrando $y' = f(y, x)$ entre x y $x + h$:

$$\int_x^{x+h} y' = \int_x^{x+h} f(y, x) \approx f(y, x)h$$

A partir de $x_0 = a, y_0 = \alpha$ se hace:

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n, x_n)$$

(c)

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) &= y(x_n) + y'(x_n)h + y''(\theta)\frac{h^2}{2}, \;\; x_n < \theta < x_{n+1} \\ &= y(x_n) + f(y_n, x_n)h + y''(\theta)\frac{h^2}{2} \end{aligned}$$

El error local de truncamiento es $y''(\theta)\frac{h^2}{2}$. Euler es un método consistente de orden 1. (Error Local$/h = O(h^2)/h$).

(d) Problema test:

$$\begin{cases} y' = qy \;\; q \in \mathcal{C} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

La región de estabilidad de un método numérico es el conjunto de los puntos qh para los que la solución del problema test permanece acotada al hacer $n \to \infty$. Para Euler:

$$y_{n+1} = y_n + qhy_n = (1 + qh)y_n = (1 + qh)^n y_0$$

La región de estabilidad son los puntos qh que cumplen $|1 + qh| < 1$

2. (a) Considerando la tangente en x_i a f:

$$y = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i)$$

e intersectando con el eje Ox ($y = 0$) para hallar x_{i+1} se llega a:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

(b)

$$f(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \frac{f''(\theta)}{2}(x - x_i)^2 \quad x < \theta < x_i$$

Si $f(x^*) = 0$:

$$f(x_i) + f'(x_i)(x^* - x_i) + \frac{f''(\theta)}{2}(x^* - x_i)^2 = 0$$

$$x^* - \left[x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\right] = \frac{f''(\theta)}{2f'(x_i)}(x^* - x_i)^2$$

El error en el paso i es $e_i = x^* - x_i$ entonces $e_{i+1} = C_i e_i^2$ y el método es de orden 2.

(c) Para resolver $x = e^{-x}$ consideramos $f(x) = x - e^{-x} = 0$.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - e^{-x_i}}{1 + e^{-x_i}}$$

x_i	x_{i+1}	$f(x_{i+1})$
1	0.538	-0.046
0.538	0.567	-2.43×10^{-4}

Solución: $x^* = 0.567$

(d)

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)\left[\frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})}\right]$$

$x_0 = 1$, $f(1) = 0.632$, $x_1 = 0.5$, $f(0.5) = -0.107$.

x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	$f(x_{i+1})$
1	0.5	0.572	7.6×10^{-3}

3. (a) i. Se eliminan $a_{21}, ..., a_{n1}$ multiplicando por $m_{i1} = a_{i1}/a_{11}$. Se obtiene una submatriz de $n-1 \times n-1$ con elementos $a_{ii}^{(2)}$. El vector b se procesa de la misma forma.

ii. Se aplica la misma idea a este nuevo sistema para eliminar $a_{32}^{(2)}, ..., a_{n2}^{(2)}$. $m_{i2} = a_{i2}^{(2)}/a_{22}^{(2)}$.

iii. Paso k:

$$\begin{cases} m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \\ a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)} \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)} \end{cases}$$

A los elementos a_{11}, $a_{22}^{(2)}$, etc. se les llama pivots. Si estos son no nulos entonces podemos continuar la eliminación.

```
for k = 2:n
    for i = k+1:n
        m(i,k) = a(i,k)/a(k,k);
        for j = k+1:n
            a(i,j) = a(i,j) - m(i,k)*a(k,j);
        end
        b(i) = b(i) - m(i,k)*b(k);
    end
end
```

(b) En el paso k se realizan $n-k$ divisiones y $(n-k)*(n-k+1)$ sumas y productos. El número que pesa es el de sumas y productos.

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+1) = n^3 - (2n+1)(n-1)\frac{n}{2} + \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} \approx \frac{n^3}{3}$$

(c) Método de Jacobi ($A = L + D + U$).

$$Dx^{k+1} = (L+U)x^k + b$$

$$x^{k+1} = -D^{-1}(L+U)x^k + D^{-1}b$$

Alternativamente:

$$x_i^{k+1} = \frac{-\sum_{j=1,i\neq j}^{n} a_{ij}x_j^k + b_i}{a_{ii}}$$

$$Q = -D^{-1}(L+U),\ c = D^{-1}b$$

(d) La norma infinito de la matriz Q correspondiente a Jacobi es:

$$||Q||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1,j\neq i}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|$$

De esta forma, para matrices diagonal dominantes ($|a_{ii}| = \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|$) $||Q||_\infty <$ 1 y por tanto el método de Jacobi converge.