Métodos Numéricos - Curso 2000

Examen 12 de marzo de 2001

Pregunta 1

Suponga que desea calcular la derivada de una función $f(x)$ en un valor x dado, usando para un valor h pequeño la expresión

$$T(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

1. Halle el error cometido, distinguiendo la parte debida al redondeo al usar aritmética de punto flotante.

2. Qué valor de h conviene elegir? Justifique su respuesta.

3. Si ya calculó el valor $T(h)$ para 2 valores distintos de h, cómo usa la extrapolación de Richardson para hallar una mejor aproximación?

Pregunta 2

Sea A una matriz $n \times n$, no singular.

1. Defina el número de condición A.

2. Considere el sistema de ecuaciones $Ax = b$. Llame x a su solución, y $x + \delta x$ a la solución de un sistema en que el segundo miembro es perturbado en δb: $A(x + \delta x) = b + \delta b$. Deduzca una foŕmula para relacionar los vectores anteriores con el número de condición de A.

3. Sabiendo que $\epsilon_{mach} = 10^{-16}$, $cond(A) = 10^8$, $x = (10, 1, 1)$, $b = (3, 2, 1)$ y que la perturbación relativa en b está acotada por 10^{-10}, cuántas cifras de x son correctas si lo tomamos como solución del sistema perturbado?

Pregunta 3

Considere la ecuación diferencial

$$(E) \quad \begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(a) = \alpha \\ x \in [a, b] \end{cases} \tag{1}$$

Suponemos que f es continua y cumple la condición de Lipchitz: $||f(x, y_1) - f(x, y_2)|| \leq L||y_1 - y_2||$. Sea $y = y(x)$ su solución.

Para hallar una aproximación de la misma se divide $[a, b]$ en N subintervalos de largo fijo $h = \frac{b-a}{N}$, y se aproximan los valores de la solución en los puntos $\{x_i = a + ih, i = 0, 1, ..., N\}$ por una sucesión de valores $\{y_i, i = 0, 1, ..., N\}$, que se calculan recursivamente a partir de $y_0 = \alpha$.

1. Defina el error global y el error local.

2. Deduzca una relación entre la cota del error local y la del error global.

3. Explique el método de Euler para resolver (E). Halle el error local y el error global, suponiendo que las cuentas se hacen con aritmética exacta (o sea que no se consideran errores debidos al redondeo).

Nota: En la segunda parte se puede admitir que si $u(x), v(x)$ son 2 soluciones de $y' = f(x, y)$ que en $\bar{x}$ difieren en δ, entonces $|u(x) - v(x)| \leq \delta e^{L(x-\bar{x})}$, $\forall x \geq \bar{x}$.