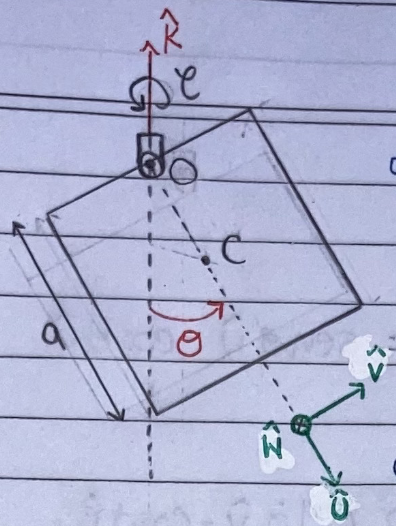
(Ej.3)



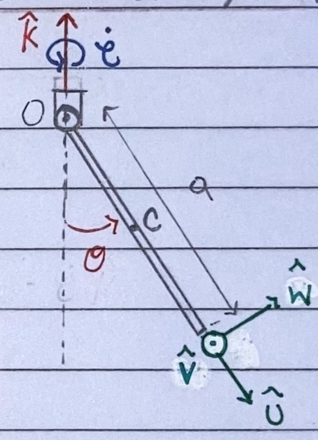
- Placa homogenea cuadrada de centro C, lado a y masa m
- La placa está unida rigidamente en el punto medio de uno de sus lados a una art. cilin. lisa cuyo eje es horizontal y $\perp$ al plano de la placa
- El eje de la art. puede girar libremente en torno a un eje vertical por medio de otra art. cilindrica lisa

φ: angulo de giro en torno a la vertical

θ: angulo entre la dirección vertical y OC

(a) Hallar $\vec{L}_O^{\,placa}$ en función de φ, θ y sus derivadas temporales

Como la placa es homogenea, su cm está en el centro geometrico del rigido el cual es el pto C



$\vec{L}_O^{\,placa} = m(C-O)\wedge\vec{v}_O + \mathbb{I}_O \cdot \vec{w}$

O es fijo $\Rightarrow \vec{v}_O = 0 \Rightarrow \vec{L}_O^{\,placa} = \mathbb{I}_O \cdot \vec{w}$

$S_0 = \{O, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ fijo (absoluto)

$S_1 = \{O, \hat{\imath}', \hat{\jmath}', \hat{k}'\}$ móvil (S_0 rotando con vel. ang $\dot{\varphi}$)

$S_2 = \{O, \hat{v}, \hat{u}, \hat{w}\}$ móvil (pegado a la placa)

Por Teo. Ad. vel. ang: $\vec{w}_{20} = \vec{w}_{10} + \vec{w}_{21} = \dot{\varphi}\hat{k} + \dot{\theta}\hat{v}$

Cálculo de $\mathbb{I}_O$:

Por Teo Steiner: $\mathbb{I}_O = \mathbb{I}_C + \mathbb{J}_O^{m,c}$

Como $\hat{v}$ es $\perp$ a la placa (rigido plano) entonces es eje principal

Por Teo. Figura plana: $I_{ww} = I_{uu} + I_{vv}$
Por simetria: $I_{uu} = I_{vv}$

$\Rightarrow I_{uu} = I_{vv} = \frac{1}{2} I_{ww}$

$$\mathbb{I}_C\{\hat{v},\hat{u},\hat{w}\} = \frac{ma^2}{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\hat{e}_\varphi = \hat{w}$
$\hat{e}_3 = \hat{v}$
$\hat{e}_r = \hat{u}$

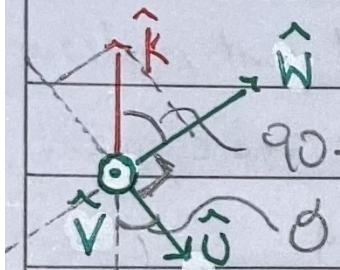
$G-O = (0, a/2, 0)$

$J_{11} = J_{33} = ma^2/4$
$J_{22} = 0$
$J_{12} = J_{13} = J_{23} = 0$

$$\Rightarrow \mathbb{J}_O^{m,c} = \frac{ma^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{I}_O = \mathbb{I}_G + \mathbb{I}_O^{m.c} = \frac{ma^2}{12}\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

Escribo $\vec{w}$ en función de $\{\hat{v},\hat{u},\hat{w}\}$



$$\hat{k} = \underbrace{\cos(90-\theta)}_{\text{sen}\theta}\,\hat{w} - \underbrace{\text{sen}(90-\theta)}_{\cos(\theta)}\,\hat{u} = \text{sen}\theta\,\hat{w} - \cos\theta\,\hat{u}$$

$$\vec{w} = \dot{e}(\text{sen}\theta.\hat{w} - \cos\theta.\hat{u}) + \dot{\theta}\hat{v}$$

$$\vec{L}_O^{\,placa} = \frac{ma^2}{12}\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\theta}\\ -\cos\theta.\dot{e}\\ \text{sen}\theta.\dot{e}\end{pmatrix} = \frac{ma^2}{12}.(4\dot{\theta}\,\hat{v} - \cos\theta\,\dot{e} + 5\,\text{sen}\theta\,\dot{e}\,\hat{w})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L}_O^{\,placa} = \frac{ma^2}{12}(4\dot{\theta}\,\hat{v} - \cos\theta\,\dot{e}.\hat{u} + 5\,\text{sen}\theta\,\dot{e}\,\hat{w})}$$