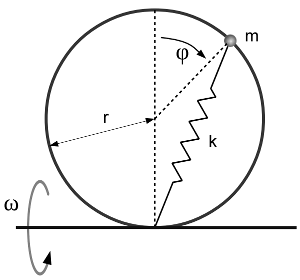
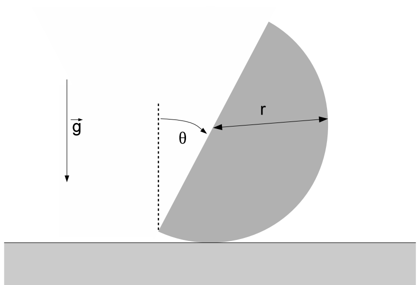
Examen de Mecánica Newtoniana
11 de diciembre de 2018

Ejercicio 1- Una partícula de masa m, se mueve guiada por una guía circular lisa de radio r. El vínculo entre la partícula y la guía es bilateral. La guía gira en torno a un eje tangente y contenido en el plano de la misma, con velocidad angular constante ω. La partícula está unida a un resorte de longitud natural nula y constante elástica k, cuyo otro extremo está unido al punto de contacto entre la guía y su eje. En el sistema NO actúa el peso.



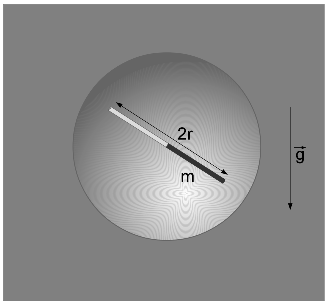
a) Calcule la velocidad y la aceleración de la partícula.
b) Considerando el movimiento relativo de la partícula en la guía circular, determine el valor de la velocidad angular de la guía ω_r para la cual existen posiciones de equilibrio en las posiciones correspondientes a $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$.
c) Si en un determinado instante la partícula se encuentra en la posición correspondiente a $\varphi = 0$, y con una velocidad despreciable relativa a la guía, determine todos los puntos de la guía que no podrán ser alcanzados por la partícula en su movimiento posterior si $\omega = \sqrt{\frac{3}{4}}\omega_r$.

Ejercicio 2- Un semi-disco de masa m y radio r, se encuentra apoyada sobre un piso liso. Para describir su movimiento se utilizará la coordenada angular θ, ángulo entre el lado recto y la dirección vertical. En un determinado instante el cuerpo rígido está en reposo y $\theta = 0$. En el sistema actúa el peso como muestra la figura.



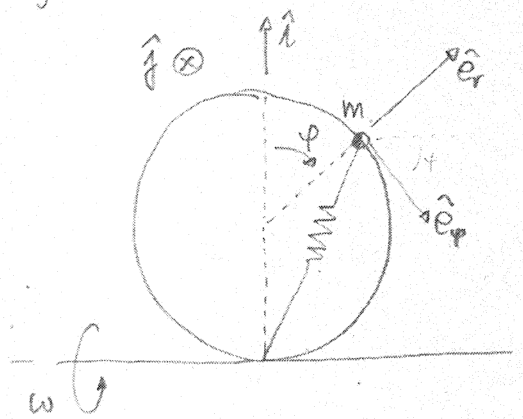
a) Determine la o las cantidades conservadas en el problema.
b) Calcule la/las ecuaciones de movimiento para el cuerpo.
c) Encuentre una expresión integral para el tiempo que tarda el lado recto del semi-disco en pasar por la posición vertical por primera vez después de iniciado el movimiento.

Ejercicio 3- Una barra de longitud 2r, está compuesta por dos barras homogéneas de longitud r unidas por un extremo, una de masa m y otra de masa despreciable como muestra la figura. La barra se mueve dentro de una cavidad esférica de radio r. El contacto entre los extremos de la barra y la superficie interna de la cavidad es liso. En un instante determinado la barra se encuentra horizontal y moviéndose con un velocidad angular $\dot{\psi}_o$ con dirección vertical. En el sistema actúa el peso.



a) Calcule las ecuaciones de movimiento de la barra.
b) Determine la altura mínima del baricentro de la barra en su movimiento. El resultado puede expresarlo como una ecuación algebraica (sin necesidad de resolverla).

Ejercicio 1



a)

$$\vec{v} = r\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi + (r + r\cos\varphi)\,\omega\,\hat{j}$$

$$\vec{a} = r\ddot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi - r\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\omega\dot{\varphi}\,\hat{j} + r\dot{\varphi}\,\dot{\hat{e}}_\varphi + (r + r\cos\varphi)\,\omega\,\dot{\hat{j}}$$

$$\dot{\hat{e}}_\varphi = \vec{\Omega}\times\hat{e}_\varphi = (\dot{\varphi}\,\hat{j} + \omega\hat{k})\times\hat{e}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\hat{e}_r - \omega\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\hat{j}$$

$$\dot{\hat{j}} = \omega\hat{k}\times\hat{j} = -\omega\,\hat{\imath}$$

$$\vec{a} = r\ddot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi - r\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\omega\dot{\varphi}\,\hat{j} + r\dot{\varphi}(-\dot{\varphi}\,\hat{e}_r - \omega\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\hat{j}) - r(1+\cos\varphi)\,\omega^2\,\hat{\imath}$$

b)

$$m\vec{a} = N\hat{e}_r + N'\hat{j} - k(r\hat{\imath} + r\hat{e}_r) \quad \rightarrow \quad \underline{\text{Ec. mov}} \qquad m\vec{a}\cdot\hat{e}_\varphi = -k\,r\,\hat{\imath}\cdot\hat{e}_\varphi$$

$$m\vec{a}\cdot\hat{e}_\varphi = m\left(r\ddot{\varphi} + r(1+\cos\varphi)\,\omega^2\,\mathrm{sen}\,\varphi\right) = +k\,r\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + (1+\cos\varphi)\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\omega^2 - \frac{k}{m}\,\mathrm{sen}\,\varphi = 0}$$

Pos. equilibrio $\Rightarrow$ $\left[(1+\cos\varphi)\,\omega^2 - \frac{k}{m}\right]\mathrm{sen}\,\varphi = 0$ $\rightarrow$ $\mathrm{sen}\,\varphi_{eq} = 0, \pi$

$\rightarrow$ $\cos\varphi_{eq} = \left(\frac{k/m}{\omega^2} - 1\right)$

$$\cos\varphi_{eq} = \pm\pi/2 \iff \frac{k/m}{\omega^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\omega_r = \sqrt{k/m}}$$

c)

$$\ddot{\varphi} = \omega_r^2\,\mathrm{sen}\,\varphi - (1+\cos\varphi)\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\omega^2$$

$$\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = \left((\omega_r^2 - \omega^2)\,\mathrm{sen}\,\varphi - \cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\omega^2\right)\dot{\varphi}$$

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{\dot{\varphi}_0^2}{2} = -(\omega_r^2 - \omega^2)(\cos\varphi - \cos\varphi_0) - \frac{\omega^2}{2}(\mathrm{sen}^2\varphi - \mathrm{sen}^2\varphi_0)$$

$$\dot{\varphi}_0 = 0 \;;\; \varphi_0 = 0 \Rightarrow \quad \dot{\varphi}^2 = 2(\omega_r^2 - \omega^2)(1 - \cos\varphi) - \omega^2\,\mathrm{sen}^2\varphi$$

$$\dot{\varphi}^2 = 0 \Rightarrow 2(\omega_r^2 - \omega^2)(1 - \cos\varphi) - \omega^2\,\mathrm{sen}^2\varphi = 0$$

$$2\left(\omega r^2 - \frac{3}{4}\omega r^2\right)(1-\cos\varphi) - \frac{3}{4}\omega r^2 \operatorname{sen}^2\varphi = 0$$

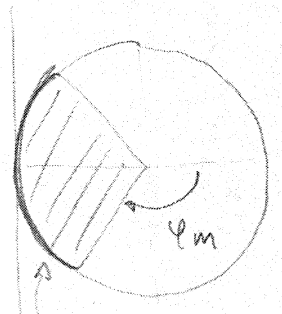
$$\frac{1}{2}(1-\cos\varphi) - \frac{3}{4}(1-\cos^2\varphi) = 0$$

$$2(1-\cos\varphi) - 3(1-\cos^2\varphi) = 0$$

$$3\cos^2\varphi - 2\cos\varphi - 1 = 0$$

$\cos\varphi_0 = 1 \Rightarrow \varphi_0 = 0$ ✓

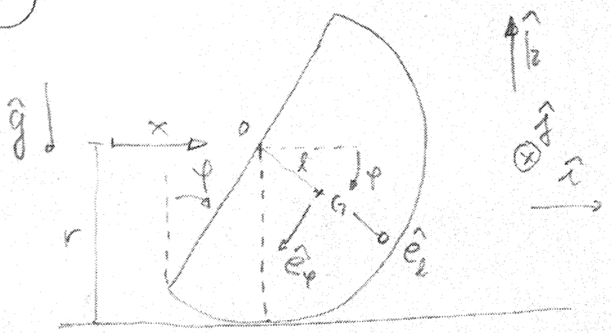
$\cos\varphi_m = -1/3 \Rightarrow \varphi_m \cong 70{,}5°$



esta zona no es visitada por la partícula

$$\dot\varphi^2 \geq 0 \Leftrightarrow \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_m$$

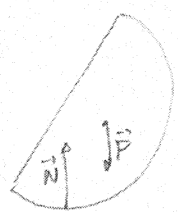
2)



$\vec r_G = x\hat\imath + l\hat e_l$

$\vec v_G = \dot x\hat\imath + l\dot\varphi\hat e_\varphi$

Diagrama de cuerpo libre $\Rightarrow$



$m\vec a_G = N\hat k - P\hat k \Rightarrow m\vec a_G\cdot\hat\imath = 0 \Rightarrow \vec v_G\cdot\hat\imath = c^{te}$

$\vec v_G\cdot\hat\imath = \dot x - l\dot\varphi\operatorname{sen}\varphi = c^{te} = 0$

$\dot\varphi(0) = 0,\ \dot x(0) = 0.$

Sistema conservativo $\Rightarrow$ $K + U = E_{mec} = c^{te}$ $\qquad U = -mgl\operatorname{sen}\varphi$

$$K = \frac{1}{2}m v_G^2 + \frac{1}{2}\dot\varphi^2 I_{G,\hat\jmath}$$

$\vec v_G\cdot\vec v_G = \dot x^2 + l^2\dot\varphi^2 - 2l\dot x\dot\varphi\operatorname{sen}\varphi$; $\frac{mr^2}{2} = I_{G,\hat\jmath} + ml^2 \Rightarrow I_{G,\hat\jmath} = \frac{mr^2}{2} - ml^2$

$$E_{mec} = \frac{m}{2}\left(\dot x^2 + l^2\dot\varphi^2 - 2l\dot x\dot\varphi\operatorname{sen}\varphi\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{mr^2}{2} - ml^2\right)\dot\varphi^2 - mgl\operatorname{sen}\varphi = 0$$

$\dot\varphi(0) = 0$

$\varphi(0) = 0$

$$\dot{x} = \ell\dot{\varphi}\,\operatorname{sen}\varphi$$

$$E_{mec} = \frac{m}{2}\left(\ell^2\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}^2\varphi + \ell^2\dot{\varphi}^2 - 2\ell^2\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}^2\varphi\right) + \frac{m}{2}\left(\frac{r^2}{2} - \ell^2\right)\dot{\varphi}^2 - mg\ell\operatorname{sen}\varphi = \emptyset$$

$$\dot{\varphi}^2\left(\frac{r^2}{2\ell^2} - \operatorname{sen}^2\varphi\right) - \frac{2g}{\ell}\operatorname{sen}\varphi = \emptyset$$

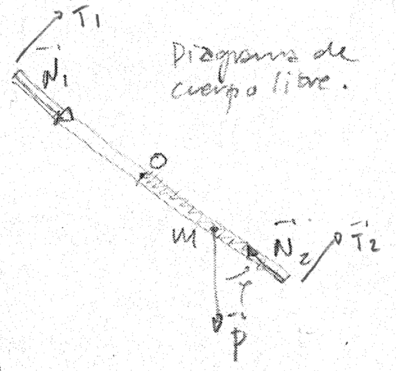
$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g/\ell\,\operatorname{sen}\varphi}{\frac{r^2}{2\ell^2} - \operatorname{sen}^2\varphi}$$

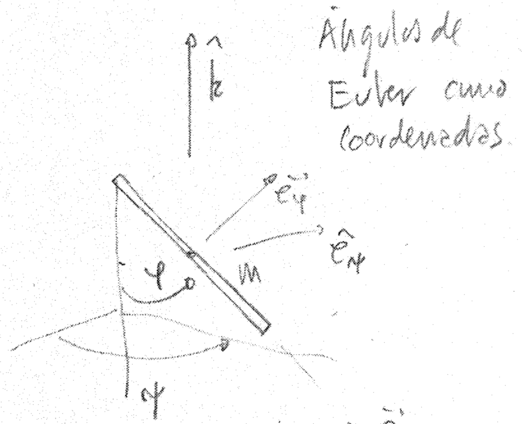
$$\frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{\dfrac{2g/\ell\,\operatorname{sen}\varphi}{\frac{r^2}{2\ell^2} - \operatorname{sen}^2\varphi}}} = 1$$

$$\boxed{\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\dfrac{2g/\ell\,\operatorname{sen}\varphi}{\frac{r^2}{2\ell^2} - \operatorname{sen}^2\varphi}}} = T}$$

3) a)

El p.to O es fijo





$$\vec{M}_O^{ext} = mg\frac{r}{2}\operatorname{sen}\varphi\,\hat{e}_\psi$$

$$\vec{M}_O^{ext}\cdot\hat{k} = 0 \longrightarrow \boxed{\vec{L}_O\cdot\hat{k} = c^{te}}$$

$$\vec{L}_O = \mathbb{I}_O\,\vec{\omega}$$

$$\underset{(\hat{e}_r,\hat{e}_\psi,\hat{e}_\varphi)}{\mathbb{I}_O} = \frac{mr^2}{12}\begin{bmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix} + \frac{mr^2}{4}\begin{bmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix} = \frac{mr^2}{3}\begin{bmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega} = -\dot{\varphi}\,\hat{e}_\psi + \dot{\psi}\,\hat{k} = -\dot{\varphi}\,\hat{e}_\psi + \dot{\psi}\left(-\cos\varphi\,\hat{e}_r + \operatorname{sen}\varphi\,\hat{e}_\varphi\right)$$

③ (cont.)

$$\vec{L}_O = \frac{mr^2}{3}\left(-\dot\varphi\,\hat{e}_\psi + \dot\psi \operatorname{sen}\varphi\, \hat{e}_\varphi\right) \Rightarrow \vec{L}_O \cdot \hat{k} = \frac{mr^2}{3}\dot\psi \operatorname{sen}^2\varphi = c^{te}$$

$$\boxed{\dot\psi \operatorname{sen}^2\varphi = c^{te}}$$

$$E_{mec} = c^{te} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}\vec\omega\, \mathbb{I}_O\, \vec\omega = K \\ -mg\frac{r}{2}\cos\varphi = U \end{array}\right\} \Rightarrow E_m = -mg\frac{r}{2}\cos\varphi + \frac{mr^2}{6}\left(\dot\varphi^2 + \dot\psi^2\operatorname{sen}^2\varphi\right)$$

$$\boxed{\dot\varphi^2 + \dot\psi^2\operatorname{sen}^2\varphi - 3g/_r\cos\varphi = c^{te}}$$

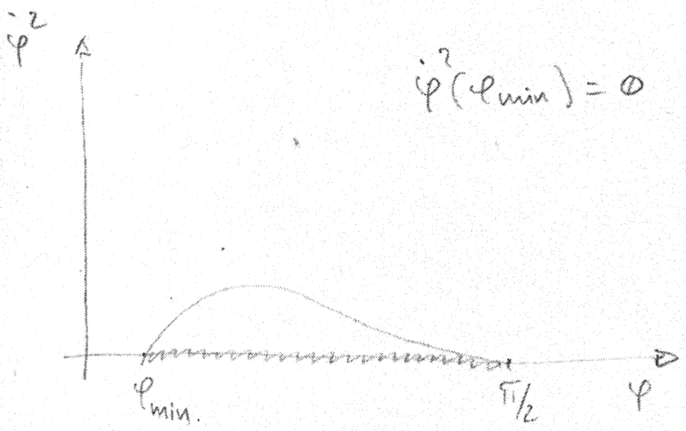
ⓑ

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(0) = \pi/2 \\ \dot\psi(0) = \dot\psi_0\end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \dot\psi\operatorname{sen}^2\varphi = \dot\psi_0 \\ \dot\varphi^2 + \dot\psi^2\operatorname{sen}^2\varphi - 3g/_r\cos\varphi = \dot\psi_0^2 \end{array}\right.$$

$$\dot\varphi^2 + \frac{\dot\psi_0^2}{\operatorname{sen}^2\varphi} - \frac{3g}{r}\cos\varphi = \dot\psi_0^2$$

$$\dot\varphi^2 = \dot\psi_0^2 - \frac{\dot\psi_0^2}{\operatorname{sen}^2\varphi} + \frac{3g}{r}\cos\varphi$$

Altura mínima del baricentro implica calcular φ_{min} ($h_m = -\frac{r}{2}\cos\varphi_m$)



$$\dot\varphi^2(\varphi_{min}) = 0 \Rightarrow \dot\psi_0^2\left(1 - \frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi_m}\right) = -\frac{3g}{r}\cos\varphi_m$$

$$\dot\psi_0^2\,\frac{(\operatorname{sen}^2\varphi_m - 1)}{\operatorname{sen}^2\varphi_m} = -\frac{3g}{r}\cos\varphi_m$$

$$\dot\psi_0^2\cos\varphi_m = \frac{3g}{r}\operatorname{sen}^2\varphi_m = \frac{3g}{r}(1-\cos^2\varphi_m)$$

$$\frac{3g}{r} - \frac{3g}{r}\cos^2\varphi_m - \dot\psi_0^2\cos\varphi_m = 0.$$

$$\cos^2\varphi_m + \frac{r\dot\psi_0^2}{3g}\cos\varphi_m - 1 = 0.$$

$$x^2 + \frac{r\dot\psi_0^2}{3g}x - 1 = 0$$ se podría continuar y obtener una expresión de $\cos\varphi_m$ ....