Soluciones del Exámen de Mecánica Newtoniana, 13/12/16

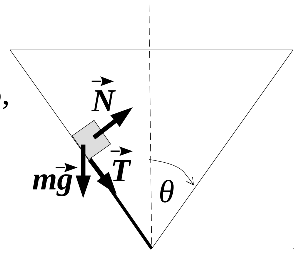
Ejercicio 1

a) Escribimos la posición, velocidad y aceleración de la partícula de masa *m* en polares esféricas, donde tenemos que la coordenada θ=60º es constante:

$$\vec{r}=r\,\hat{e}_r$$
$$\vec{v}=\dot{r}\,\hat{e}_r+r\,\dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{e}_\varphi$$
$$\vec{a}=(\ddot{r}-r\,\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\hat{e}_r-r\,\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\,\hat{e}_\theta+(2\dot{r}\,\dot{\varphi}\sin\theta+r\,\ddot{\varphi}\sin\theta)\hat{e}_\varphi$$

Utilizando que $r(t)=r_0-v_0 t$, y el valor explícito de θ=60º, tenemos:

$$\vec{r}=(r_0-v_0 t)\hat{e}_r$$
$$\vec{v}=-v_0\hat{e}_r+\frac{\sqrt{3}}{2}(r_0-v_0 t)\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi$$
$$\vec{a}=-\frac{3}{4}(r_0-v_0 t)\dot{\varphi}^2\,\hat{e}_r-\frac{\sqrt{3}}{4}(r_0-v_0 t)\dot{\varphi}^2\,\hat{e}_\theta+\left[-\sqrt{3}v_0\dot{\varphi}+\frac{\sqrt{3}}{2}(r_0-v_0 t)\ddot{\varphi}\right]\hat{e}_\varphi$$



Realizamos el diagrama de cuerpo libre de la partícula de masa *m* (ver figura). Sobre ella actúan tres fuerzas: la tensión de la cuerda, $\vec{T}=-T\,\hat{e}_r$, la normal del cono, $\vec{N}=-N\,\hat{e}_\theta$, y el peso, $m\vec{g}=-m\,g\,\hat{k}=-m\,g(\cos\theta\,\hat{e}_r-\sin\theta\,\hat{e}_\theta)=-\frac{m\,g}{2}\hat{e}_r+\frac{\sqrt{3}m\,g}{2}\hat{e}_\theta$.
Luego, las componentes de la ecuación de Newton quedan como:

$$\hat{e}_r)\quad -\frac{3m}{4}(r_0-v_0 t)\dot{\varphi}^2=-\frac{m\,g}{2}-T$$
$$\hat{e}_\theta)\quad -\frac{\sqrt{3}m}{4}(r_0-v_0 t)\dot{\varphi}^2=-N+\frac{\sqrt{3}m\,g}{2}$$
$$\hat{e}_\varphi)\quad -\sqrt{3}m\,v_0\dot{\varphi}+\frac{\sqrt{3}m}{2}(r_0-v_0 t)\ddot{\varphi}=0$$

La tercera componente es la ecuación de movimiento. Observamos además, que preintegrando obtenemos:

$$-\sqrt{3}m\,v_0\dot{\varphi}+\frac{\sqrt{3}m}{2}(r_0-v_0 t)\ddot{\varphi}=0\rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}m(r_0-v_0 t)^2\dot{\varphi}\right)=0\rightarrow L_{0z}=\frac{\sqrt{3}}{2}m(r_0-v_0 t)^2\dot{\varphi}=\text{cte.}$$

O sea, que se conserva el momento angular de la partícula respecto a O.

b) Si la condición inicial de $\dot{\varphi}$ es $\dot{\varphi}(0)=\omega_0$, en virtud de la ecuación de movimiento, tenemos:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}m(r_0-v_0 t)^2\dot{\varphi}=\frac{\sqrt{3}}{2}m\,r_0^2\omega_0\rightarrow\dot{\varphi}=\frac{r_0^2\omega_0}{(r_0-v_0 t)^2}$$

Por lo tanto, la tensión queda como $T(t)=\frac{3m}{4}(r_0-v_0 t)\dot{\varphi}^2-\frac{m\,g}{2}=\frac{3m}{4}\frac{r_0^4\omega_0^2}{(r_0-v_0 t)^3}-\frac{m\,g}{2}$.

Si el hilo se mantiene tenso, debemos tener $T(t)\geq 0,\forall t,0\leq t<\frac{r_0}{v_0}$

O sea, $T(t)=\frac{3m}{4}\frac{r_0^4\omega_0^2}{(r_0-v_0 t)^3}-\frac{m\,g}{2}\geq\frac{3m}{4}\frac{r_0^4\omega_0^2}{r_0^3}-\frac{m\,g}{2}=\frac{3m\,r_0\omega_0^2}{4}-\frac{m\,g}{2}\geq 0\rightarrow\omega_0\geq\sqrt{\frac{2g}{3r_0}}$.

c) La variación de energía mecánica de la partícula entre dos instantes será el trabajo de la tensión.

La energía cinética de la partícula se puede calcular como: $K(t)=\frac{m v_0^2}{2}+\frac{3 m r_0^4 \omega_0^2}{8(r_0-v_0 t)^2}$.

La energía potencial gravitoria de la partícula estará dada por $U(t)=\frac{m g}{2}(r_0-v_0 t)$.

Luego, la energía mecánica de la partícula se puede calcular como:

$$E(t)=\frac{m v_0^2}{2}+\frac{3 m r_0^4 \omega_0^2}{8(r_0-v_0 t)^2}+\frac{m g(r_0-v_0 t)}{2}.$$

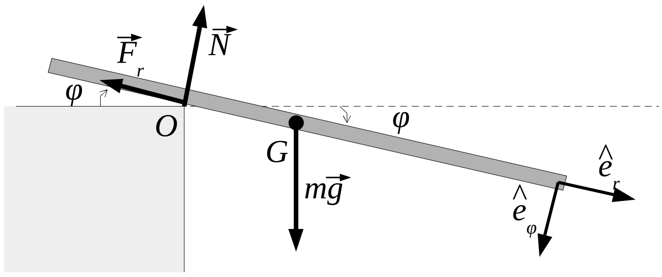
El trabajo de la tensión será la variación de la energía mecánica entre t=0 y t=2r_0/3v_0.

$$W_T=\Delta E=\frac{27 m r_0^2 \omega_0^2}{8}+\frac{m g r_0}{6}-\frac{3 m r_0^2 \omega_0^2}{8}-\frac{m g r_0}{2}=3 m r_0^2 \omega_0^2-\frac{m g r_0}{3}.$$

Ejercicio 2

a) Suponiendo que no desliza (O es fijo respecto a G), la aceleración del centro de masa de la placa, se puede calcular como $\vec{a}_G=-\frac{L}{2}\dot{\varphi}^2 \hat{e}_r+\frac{L}{2}\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi$.

Las fuerzas aplicadas sobre la barra serán la fuerza de rozamiento estática , $\vec{F}_r=-F_r \hat{e}_r$, la normal, $\vec{N}=-N\hat{e}_\varphi$, ambas aplicadas en O, y el peso, $m\vec{g}=m g(\cos\varphi\,\hat{e}_\varphi+\sin\varphi\,\hat{e}_r)$, que es en la dirección vertical, apuntando hacia abajo (Ver figura). Entonces la primera cardinal de la barra queda como:



$$\hat{e}_r)\quad -\frac{m L\dot{\varphi}^2}{2}=-F_r+m g\sin\varphi.$$

$$\hat{e}_\varphi)\quad \frac{m L\ddot{\varphi}}{2}=-N+m g\cos\varphi.$$

La segunda cardinal de la barra expresada en el sistema solidario al centro de masa queda como:

$$\frac{m L^2\ddot{\varphi}}{3}=\frac{L N}{2}$$

Despejando la normal de la primera cardinal tenemos:

$$N=m g\cos\varphi-\frac{m L\ddot{\varphi}}{2}$$

Sustituyendo en la segunda cardinal, obtenemos la ecuación de movimiento de la barra:

$$\frac{7 m L^2\ddot{\varphi}}{12}=\frac{L m g\cos\varphi}{2}\rightarrow\ddot{\varphi}=\frac{6 g\cos\varphi}{7 L}.$$

b) A partir de la ecuación de movimiento, utilizando las condiciones iniciales tenemos: $\frac{\dot{\varphi}^2}{2}=\frac{6 g\sin\varphi}{7 L}$.

Sustituyendo en la primera cardinal, obtengo la normal y la fuerza de rozamiento estática en función del ángulo:

$$F_r=\frac{mL\dot{\varphi}^2}{2}+mg\sin\varphi=\frac{6mg\sin\varphi}{7}+mg\sin\varphi=\frac{13mg\sin\varphi}{7}.$$

$$N=-\frac{mL\ddot{\varphi}}{2}+mg\cos\varphi=mg\cos\varphi-\frac{3mg\cos\varphi}{7}=\frac{4mg\cos\varphi}{7}$$

Usando la condición de rozamiento estático calculamos el ángulo de deslizamiento:

$$|F_r|\leq f_e|N|$$

$$\left|\frac{13mg\sin\varphi}{7}\right|\leq\left|\frac{4mg\cos\varphi}{7}\right|\rightarrow tg\,\varphi_d=\frac{4}{13}\rightarrow\varphi_d\approx 17^o$$

c) Si ahora desliza, la aceleración del centro de masa pasa a ser $\vec{a}_G=(\ddot{x}-x\dot{\varphi}^2)\hat{e}_r+(2\dot{x}\dot{\varphi}+x\ddot{\varphi})\hat{e}_\varphi$, donde x es la distancia entre O y G. La fuerza de rozamiento ahora debe verificar $|F_r|=F_d|N|=\frac{4}{5}|N|$.

La primera cardinal ahora queda como:

$\hat{e}_r)\quad m\ddot{x}-mx\dot{\varphi}^2=-F_r+mg\sin\varphi.$

$\hat{e}_\varphi)\quad 2m\dot{x}\dot{\varphi}+mx\ddot{\varphi}=-N+mg\cos\varphi.$

y la segunda cardinal, ahora es:

$$\frac{mL^2\ddot{\varphi}}{3}=xN$$

En el instante inicial, $x(0)=\frac{L}{2},\dot{x}(0)=0,\varphi(0)=\varphi_d.$

Sustituyendo despejo el valor de la normal y la fuerza de rozamiento en dicho instante:

$$N=-\frac{mL\ddot{\varphi}}{2}+mg\cos\varphi_d=\frac{4mg\cos\varphi_d}{7},$$

$$F_r=\frac{4}{5}N=\frac{16mg\cos\varphi_d}{35}$$

Pero $\cos\varphi_d=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi_d}}=\frac{1}{\sqrt{1+16/169}}=\sqrt{\frac{169}{185}}=\frac{13}{\sqrt{185}}.$ Entonces tenemos:

$$N=\frac{4mg\cos\varphi_d}{7}=\frac{52mg}{7\sqrt{185}},$$

$$F_r=\frac{16mg\cos\varphi_d}{35}=\frac{208mg}{35\sqrt{185}}$$

Despejando la aceleración del centro de masa en ese mismo instante obtenemos:

$$\vec{a}_G=-\frac{68g}{35\sqrt{185}}\hat{e}_r-\frac{39g}{7\sqrt{185}}\hat{e}_\varphi.$$

Ejercicio 3

a) Considero la placa con el agujero como si fuera la superposición de una placa sin agujero de la misma densidad y una placa de “masa negativa” con densidad opuesta, ubicada donde está el agujero. La densidad de la placa està dada por $\mu=\frac{m}{(4a)^2-a^2}=\frac{m}{15a^2}$. Entonces la masa de una placa de igual densidad sin agujero será $m'=\mu(4a)^2=\frac{16m}{15}$.

En todo el problema consideraremos la base $(\hat{i},\hat{j},\hat{k})$ como solidaria a la placa.
El tensor de inercia de la placa sin agujero de masa *m'* y lado 4 *a* será entonces:

$$I_O^{placa}=\begin{pmatrix} \frac{64ma^2}{45} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{128ma^2}{45} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{64ma^2}{45} \end{pmatrix}$$

Por otro lado, la masa del agujero será $m''=-\mu a^2=-\frac{m}{15}$. El tensor de inercia del agujero respecto a su centro C será: $I_C^{agujero}=\begin{pmatrix} -\frac{ma^2}{180} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{ma^2}{90} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{ma^2}{180} \end{pmatrix}$.

Si ahora aplico Steiner, calculo el tensor del agujero respecto al punto O:

$$I_O^{agujero}=I_C^{qgujero}+\begin{pmatrix} -\frac{ma^2}{15} & 0 & \frac{ma^2}{15} \\ 0 & -\frac{2ma^2}{15} & 0 \\ \frac{ma^2}{15} & 0 & -\frac{ma^2}{15} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{13ma^2}{180} & 0 & \frac{ma^2}{15} \\ 0 & -\frac{13ma^2}{90} & 0 \\ \frac{ma^2}{15} & 0 & -\frac{13ma^2}{180} \end{pmatrix}.$$

Superponiendo ambos tensores tenemos el tensor de la placa con agujero:

$$I_O^{\text{total}}=I_O^{qgujero}+I_O^{placa}=\begin{pmatrix} \frac{243ma^2}{180} & 0 & \frac{ma^2}{15} \\ 0 & \frac{243ma^2}{90} & 0 \\ \frac{ma^2}{15} & 0 & \frac{243ma^2}{180} \end{pmatrix}.$$

b) El momento angular de la placa con agujero, expresado en una base solidaria a la placa, se calcula como $\vec{L}_O^{total}=\frac{ma^2\Omega}{15}\hat{i}+\frac{243ma^2\Omega}{180}\hat{k}$. Su derivada temporal absoluta, usando Roverbal, queda como: $\left(\frac{d\vec{L}_O^{tot}}{dt}\right)_{\text{abs}}=\left(\frac{d\vec{L}_O^{tot}}{dt}\right)_{rel}+\vec{\Omega}\times\vec{L}_O^{tot}=\Omega\hat{k}\times\left[\frac{ma^2\Omega}{15}\hat{i}+\frac{243ma^2\Omega}{180}\hat{k}\right]=\frac{ma^2\Omega^2}{15}\hat{j}$.

Supongo que las fuerzas sobres los soportes *A* y *B* son, respectivamente, de la forma:
$\vec{F}_A=F_{Ax}\hat{i}+F_{Ay}\hat{j}$; $\vec{F}_B=F_{Bx}\hat{i}+F_{By}\hat{j}$. El torque en O de dichas fuerzas se calcula como:

$$\vec{M}_O=\vec{r}_A\times\vec{F}_A+\vec{r}_B\times\vec{F}_B=-3a\hat{k}\times(F_{Ax}\hat{i}+F_{Ay}\hat{j})+3a\hat{k}\times(F_{Bx}\hat{i}+F_{By}\hat{j})$$

$$\vec{M}_O=(-3aF_{Ax}+3aF_{Bx})\hat{j}+(3aF_{Ay}-3aF_{By})\hat{i}$$

Entonces, la segunda cardinal de la placa en O (punto fijo) queda como:

$$\hat{i}) \qquad 0=3a\left(F_{Ay}-F_{By}\right)$$
$$\hat{j}) \quad \frac{ma^2\Omega^2}{15}=3a\left(-F_{Ax}+F_{Bx}\right)$$

Ahora para escribir la primera cardinal, calculo la aceleración del centro de masa de la placa con agujero.
La posición del centro de masa de la placa con agujero se calcula como:

$$\vec{r}_G=\frac{m'\vec{O}+m''\vec{C}}{m}=-\frac{a}{15}\hat{i}+\frac{a}{15}\hat{k}$$

La velocidad del centro de masa será $\vec{v}_G=\vec{\Omega}\times\vec{r}_G=-\frac{a\Omega}{15}\hat{j}$.

La aceleración del centro de masa queda como: $\vec{a}_G=\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}_G)=\frac{a\Omega^2}{15}\hat{i}$.

Entonces, la primera cardinal queda como:

$$\hat{i}) \quad \frac{ma\Omega^2}{15}=F_{Ax}+F_{Bx}$$
$$\hat{j}) \qquad 0=F_{Ay}+F_{By}$$

Despejando tenemos :

$$F_{Ay}=F_{By}=0$$
$$F_{Ax}=\frac{ma\Omega^2}{45}$$
$$F_{Bx}=\frac{2ma\Omega^2}{45}.$$

c) El hueco debe estar ubicado de forma que tanto la derivada temporal del momento angular de la placa como la aceleración del centro de masa sean nulos. Lo primero se logra anulando los términos fuera de la diagonal del tensor de inercia (un segundo agujero idéntico con centro en (-*a*, 0, *a*) o en (*a*,0, -*a*) logra esto, ya que cambia el signo de los productos de inercia).Lo segundo se logra haciendo que el centro de masa de la placa esté en el eje *z* (para lograr esto el segundo agujero se puede ubicar en (-*a*, 0, *a*) o en (-*a*,0, -*a*)). Por lo tanto, la única posición posible para el agujero que logra ambas cosas a la vez es (-*a*,0, *a*), es decir, que el segundo agujero sea simétrico respecto al eje *z* del primer agujero.