Solución Primer Parcial 9 de mayo de 2009

Mecánica Newtoniana

Ejercicio 1

1. Expresando la velocidad en coordenadas cilíndricas, la fuerza de Lorentz sobre la partícula es:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\ &= q\left[E_0 \frac{a}{\rho}\hat{e}_\rho + (\dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi + \dot{z}\hat{k}) \times B\hat{k}\right] \\ &= q\left(E_0 \frac{a}{\rho} + \rho\dot{\varphi}B\right)\hat{e}_\rho - q\dot{\rho}B\hat{e}_\varphi\end{aligned}$$

y a partir de la segunda ley de Newton proyectada según cada versor de coordenadas cilíndricas tenemos:

$$q\left(E_0 \frac{a}{\rho} + \rho\dot{\varphi}B\right) = m\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right) \quad (1)$$

$$-q\dot{\rho}B = m\left(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\right) \quad (2)$$

$$0 = \ddot{z} \quad (3)$$

2. Multiplicando (2) por ρ nos queda:

$$-q\rho\dot{\rho}B = m\left(\rho^2\ddot{\varphi} + 2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi}\right)$$

que se puede identificar con:

$$\frac{d}{dt}\left(m\rho^2\dot{\varphi} + \frac{qB}{2}\rho^2\right) = 0$$

es decir:

$$K = m\rho^2\dot{\varphi} + \frac{qB}{2}\rho^2$$

3. La potencia de la fuerza magnética es: $q\vec{v}\times\vec{B}\cdot\vec{v} = 0$. El potencial asociado a la fuerza eléctrica es:

$$U(\rho) = U_0 - qaE_0 ln\left(\frac{\rho}{a}\right)$$

4. La energía del sistema es:

$$E = T + U(\rho) = \frac{1}{2}m\left[\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2\right] + U(\rho) \overset{(3)}{=} \frac{1}{2}m\left[\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2 + \dot{z}_0^2\right] + U(\rho)$$

siendo $\dot{z}_0$ la velocidad inicial en la dirección del eje $\hat{k}$. Despejando $\dot{\varphi}$ de la expresión para K y sustituyendo en la de la energía obtenemos esta ecuación:

$$\dot{\rho}^2 = \frac{2}{m}\left[E - U_0 + qaE_0 ln\left(\frac{\rho}{a}\right)\right] - \frac{\rho^2}{m^2}\left(\frac{K}{\rho^2} - \frac{qB}{2}\right)^2 - \dot{z}_0^2 \equiv \phi(\rho)$$

5. Para que la partícula se mueva en una órbita circular de radio ρ_0 es necesario que $\dot{z}_0 = 0$, $\dot{\rho}_0 = 0$, $\ddot{\rho} = 0$. A partir de (2), la segunda condición implica $\dot{\varphi}$ constante. La última condición implica, a partir de (1):

$$q\left(E_0 \frac{a}{\rho_0} + \rho\dot{\varphi}_0 B\right) = -m\rho_0\dot{\varphi}_0^2$$

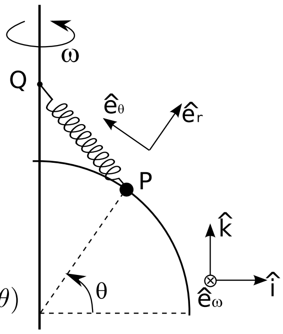
es decir, tenemos los siguientes posibles valores para $\dot{\varphi}_0$:

$$\dot{\varphi}_0 = -\frac{qB}{2m} \pm \left[\left(\frac{qB}{2m}\right)^2 - \frac{qE_0 a}{m\rho_0^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

siempre que se cumpla $\left(\frac{qB}{2m}\right)^2 - \frac{qE_0 a}{m\rho_0^2} \geq 0$.

Ejercicio 2

1. Ninguna fuerza reactiva que actúa sobre la partícula tiene componente según $\hat{e}_\theta$, de modo que aplicando la segunda ley de Newton y proyectando en dicha dirección obtenemos:



$$m\vec{a}\cdot\hat{e}_\theta = -k(P-Q)\cdot\hat{e}_\theta - mg\cos(\theta) \qquad (4)$$

La fuerza del resorte, la podemos escribir como:

$$-k(P-Q)\cdot\hat{e}_\theta = k\left(-R\hat{e}_r + \frac{3}{2}R\hat{k}\right)\cdot\hat{e}_\theta = \frac{3}{2}kR\cos(\theta)$$

Usando el teorema de Coriolis, ubicando un sistema relativo a la guía centrado en O, podemos calcular la aceleración de la partícula. La aceleración relativa a la guía en la dirección $\hat{e}_\theta$ es $R\ddot{\theta}$, la aceleración de Coriolis no tiene componente en dicha dirección, mientras que la aceleración de transporte queda $\vec{a}_T = -R\cos(\theta)\omega^2\hat{\imath}$. Finalmente juntando todo lo anterior, podemos reescribir (4) como:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \left(\omega^2\sin(\theta) + \frac{g}{R} - \frac{3}{2}\frac{k}{m}\right)\cos(\theta) = 0} \qquad (5)$$

2. Para calcular los puntos de equilibrio y su estabilidad, observamos que la ecuación de movimiento dada en (5) es de la forma $\ddot{\theta} + f(\theta) = 0$, de modo que los puntos de **equilibrio estables** θ_0 verifican:

$$\begin{cases} f(\theta_0) = 0 \\ f \text{ creciente en un entorno de } \theta_0 \end{cases}$$

(es decir, la primitiva de la función $f(\theta)$ tenga un mínimo en θ_0).

Los puntos de equilibrio quedan:

$$\begin{array}{ccc} \cos\theta_1 = 0 & \Rightarrow & \theta_1 = \frac{\pi}{2} \\ \omega^2\sin\theta_2 + \frac{g}{R} - \frac{3}{2}\frac{k}{m} = 0 & \Rightarrow & \sin\theta_2 = \frac{1}{\omega^2}\left[\frac{3}{2}\frac{k}{m} - \frac{g}{R}\right] \end{array} \qquad (6)$$

Luego el punto de equilibrio en θ_2 $\exists$ sii $0 \le \left[\frac{3}{2}\frac{k}{m} - \frac{g}{R}\right] \le \omega^2$

3. Estudiamos la estabilidad de los puntos θ_1 y θ_2:

$$f'(\theta_1) = -\left(\omega^2 + \frac{g}{R} - \frac{3}{2}\frac{k}{m}\right)$$

de modo que θ_1 es estable si $\omega^2 \le \frac{3}{2}\frac{k}{m} - \frac{g}{R}$ *

$$f'(\theta_2) = \omega^2\left[1 - \frac{1}{\omega^4}\left(\frac{3}{2}\frac{k}{m} - \frac{g}{R}\right)^2\right]$$

Por lo tanto θ_2 sera punto de equilibrio estable si $\omega^2 \ge \left(\frac{3}{2}\frac{k}{m} - \frac{g}{R}\right)$ ** , que es condición necesaria para la existencia de θ_2, de modo que si el punto de equilibrio existe, es estable. Además si existe θ_2, θ_1 pasa a ser un punto de equilibrio inestable.

* Para $\omega^2 < \frac{3}{2}\frac{k}{m} - \frac{g}{R}$, $f'(\theta_1) > 0$. Para $\omega^2 = \frac{3}{2}\frac{k}{m} - \frac{g}{R}$, $f(\theta) = \omega^2(sen\theta - 1)cos\theta$, que es creciente alrededor de θ_1.

** Para Para $\omega^2 = \frac{3}{2}\frac{k}{m} - \frac{g}{R}$, $\theta_1 = \theta_2$ y se aplica el criterio de la nota al pie anterior.