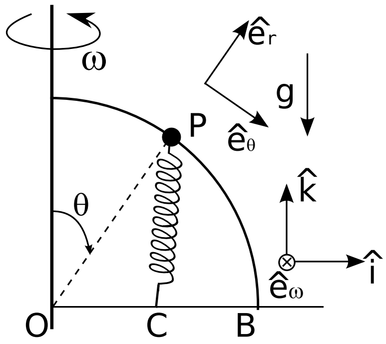
Solución Primer Parcial 7 de mayo de 2010

Mecánica Newtoniana

Ejercicio 1



1. Aplicando Newton según la dirección de $\hat{e_\theta}$:

$$\vec{F} \cdot \hat{e_\theta} = m\vec{a} \cdot \hat{e_\theta}$$

$$mgsen\theta - k(P-C) \cdot \hat{e_\theta} = m[R\ddot{\theta} - \omega^2 Rsen\theta\hat{i} \cdot \hat{e_\theta}]$$

tenemos que:

$$P - C = R\hat{e}_r - \frac{R}{2}\hat{i} \quad \therefore \quad (P-C) \cdot \hat{e_\theta} = -\frac{R}{2}cos\theta$$

$$\hat{i} \cdot \hat{e_\theta} = cos\theta$$

por lo tanto

$$\boxed{\ddot{\theta} - \omega^2 sen\theta cos\theta - \frac{g}{R}sen\theta - \frac{k}{2m}cos\theta = 0}$$

2. Preintegrando la ecuación anterior entre 0 y θ ($\dot{\theta}(0) = 0$):

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{g}{R}(1 - cos\theta) + \frac{1}{2}\omega^2 sen^2\theta + \frac{1}{2}\frac{k}{m}sen\theta$$

$$\dot{\theta}^2(\frac{\pi}{2}) = \frac{2g}{R} + \omega^2 + \frac{k}{m}$$

$$\boxed{\vec{v}(\frac{\pi}{2}) = R\dot{\theta}(\frac{\pi}{2})\hat{e_\theta} + \omega R\hat{e}_\omega}$$

3. Planteando la potencia

$$P_N = \vec{N} \cdot \vec{v} = N_\omega \omega Rsen\theta$$

donde

$$N_\omega = m(2\omega\vec{k} \times R\dot{\theta}\hat{e}_\theta) \cdot \hat{e}_\omega \Rightarrow N_\omega = 2m\omega Rcos\theta\dot{\theta}$$

luego calculando el trabajo en función de la potencia

$$W_N = \int_0^{t_{\frac{\pi}{2}}} P_N dt = \int_0^{t_{\frac{\pi}{2}}} 2m\omega^2 R^2 sen\theta cos\theta\dot{\theta}dt = \int_0^{t_{\frac{\pi}{2}}} m\omega^2 R^2 \frac{dsen^2\theta}{dt}dt = m\omega^2 R^2 sen^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{W_N = m\omega^2 R^2}$$

Ejercicio 2

1. Como $\vec{F}$ depende del ángulo θ, el trabajo siguiendo las dos trayectorias indicadas es diferente, por lo que no se trata de una fuerza conservativa.

2. A partir de la ecuación de Binet:

$$-\frac{K}{2}u^2(1-cos2\theta) = -\frac{\ell^2 u^2}{m^2}(u+u'')$$

donde $\ell = \ell_0 = ma^2\dot{\theta}_0$.

$$\Rightarrow \frac{m^2K}{\ell^2} = \frac{3}{2a} \Rightarrow u'' + u = \tfrac{3}{4a}(1-cos2\theta)$$

Puesto que la ecuación de movimiento es una ecuación diferencial lineal de segundo orden, obtenemos su solución por superposición de la solución homogénea y la particular: $u = u_h + u_p$.
La ecuación homogénea $u'' + u = 0$, tiene solución $u_h = Acos\theta + Bsen\theta$, donde A y B son constantes a determinar imponiendo las condiciones iniciales a u.
La solución particular es de la forma $u_p = Ccos2\theta + D$, sustituyendo en la ecuación diferencial llegamos a: $C = \frac{1}{4a}$ y $D = \frac{3}{4a}$.

$$\Rightarrow u = Acos\theta + Bsen\theta + \frac{1}{4a}cos2\theta + \frac{3}{4a}$$

usando que: $u(\theta = 0) = \frac{1}{a}$ y $u'(\theta = 0) = 0$ llegamos a que $A = B = 0$.
O sea que $u = \frac{1}{4a}cos2\theta + \frac{3}{4a} = \frac{1}{r}$:

$$\Rightarrow \boxed{r(\theta) = \frac{4a}{3 + cos2\theta}}$$

3. La distancia máxima es: $r_{max} = 2a$.

$$\boxed{\vec{v} = r\dot{\theta}\hat{e}_\theta = 2a\frac{\ell}{m(2a)^2}\hat{e}_\theta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2K}{3a}}\hat{e}_\theta}$$