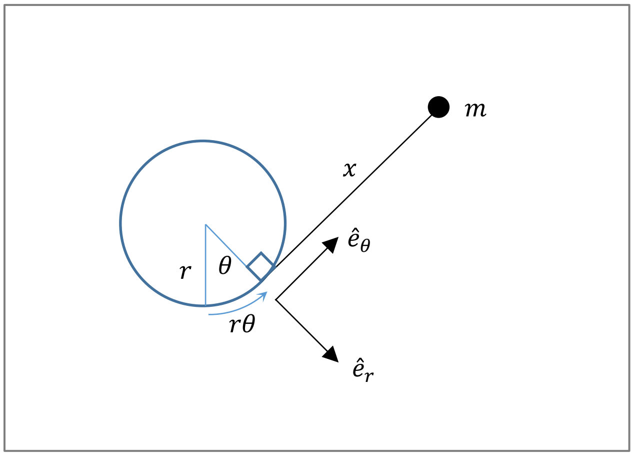
Ejercicio 1



a) *Posición* (usando coord. polares para ubicar la masa): $\boldsymbol{r} = r\hat{e}_r + x\hat{e}_{\boldsymbol{\theta}}$ (r es el radio del disco, cte., y x es la long. de la cuerda sin enrollar).

Vínculo: $x = b - r\theta$ (b es el largo inicial de cuerda, $r\theta$ es la longitud de la parte enrollada). Entonces, $\dot{x} = -r\dot{\theta}$ (r y b son constantes).

Velocidad:
$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} &= r\dot{\hat{e}}_r + \dot{x}\hat{e}_{\boldsymbol{\theta}} + x\dot{\hat{e}}_{\boldsymbol{\theta}} \\ &= r\dot{\theta}\hat{e}_\theta - r\dot{\theta}\hat{e}_\theta - x\dot{\theta}\hat{e}_r \\ &= -(b - r\theta)\dot{\theta}\hat{e}_r\end{aligned}$$

Observamos que la velocidad es siempre perpendicular al hilo, que está en dirección de $\hat{e}_\theta$.

Aceleración:
$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \left(r\dot{\theta}^2 - (b - r\theta)\ddot{\theta}\right)\hat{e}_r - (b - r\theta)\dot{\theta}^2\hat{e}_\theta$$

b) La tensión de la cuerda tiene la dirección del hilo. Proyectamos la segunda ley de Newton en la dirección perpendicular (o sea, según $\hat{e}_r$) y obtenemos la ec. de movimiento:

$$mr\dot{\theta}^2 - m(b - r\theta)\ddot{\theta} = 0 \leftrightarrow \dot{\theta}^2 = \left(\frac{b}{r} - \theta\right)\ddot{\theta}$$

b) El módulo al cuadrado de la velocidad es $v^2 = (b - r\theta)^2\dot{\theta}^2$ y su derivada vale
$$\begin{aligned}\frac{d(v^2)}{dt} &= -2r(b - r\theta)\dot{\theta}^3 + 2(b - r\theta)^2\dot{\theta}\ddot{\theta} \\ &= -2(b - r\theta)\dot{\theta}\left(r\dot{\theta}^2 - (b - r\theta)\ddot{\theta}\right) = 0\end{aligned}$$

dado que el último factor del producto es nulo en virtud de la ecuación de movimiento. Dado que durante el movimiento se tiene $b \geq r\theta$ y $\dot{\theta} \geq 0$, se puede escribir el módulo de la velocidad como

$$|\boldsymbol{v}| = u = (b - r\theta)\dot{\theta} = f(\theta)\dot{\theta},$$

donde definimos $f(\theta) \equiv b - r\theta$. Esto no es otra cosa que la coordenada x que fue definida previamente.

c) (I) Escribimos la tensión del hilo como $\boldsymbol{T} = -T\hat{e}_\theta$. Proyectamos la segunda ley de Newton en esa dirección:

$$T = m(b - r\theta)\dot{\theta}^2 = m(b - r\theta)\frac{u^2}{f(\theta)^2} = \frac{mu^2}{b - r\theta}$$

Observación: la velocidad es $\boldsymbol{v} = -u\hat{e}_r = -f(\theta)\dot{\theta}\hat{e}_r$. Al proyectar Newton en la dirección tangencial obtenemos $u =$ cte., como en la parte anterior.

(II) Planteamos una ecuación diferencial para $\theta(t)$ (usando separación de variables):

$$\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{u}{b - r\theta} \leftrightarrow \mathrm{d}t = \frac{b - r\theta}{\mathrm{u}}\mathrm{d}\theta$$

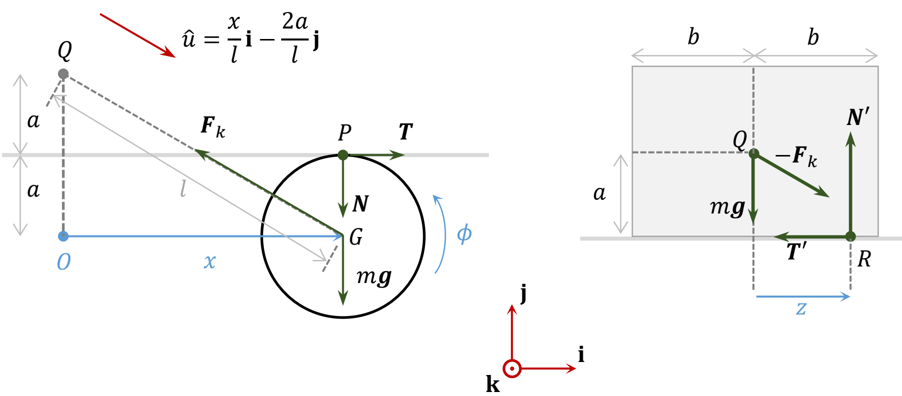
Integramos entre la posición inicial ($t = 0$, $\theta(0) = 0$) y la posición final ($t = t_f$ y $\theta(t_f) = b/r$, dado que la cuerda está completamente enrollada):

$$t_f = \int_0^{b/r} \frac{b - r\theta}{\mathrm{u}}\mathrm{d}\theta = -\left.\frac{(b - r\theta)^2}{2ru}\right|_0^{b/r} = \frac{b^2}{2ru}$$

Observación: el método anterior permite encontrar la ley horaria de la coordenada θ, con el resultado

$$\theta(t) = \frac{b - \sqrt{b - 2rut}}{r}$$

Ejercicio 2



Sistema fijo $S = \{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$

$$m\boldsymbol{g} = -mg\mathbf{j}$$
$$\boldsymbol{N} = -N$$
$$\boldsymbol{T} = T\mathbf{i}$$
$$\boldsymbol{F}_k = -kl\hat{u} = -kx\mathbf{i} + 2ka\mathbf{j}$$
$$\boldsymbol{N}' = N'\mathbf{j}$$
$$\boldsymbol{T}' = -T'\mathbf{i}$$

z: posición efectiva de la reacción del plano sobre la placa

a) (I) Sup. placa en reposo. Estudiamos el disco.

Centro de masa: $\boldsymbol{r}_G = x\mathbf{i}, \boldsymbol{v}_G = \dot{x}\mathbf{i}, \boldsymbol{a}_G = \ddot{x}\mathbf{i}$.
Velocidad angular del disco: $\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\mathbf{k}$.
El punto P no desliza: $\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{GP}$
$$= \dot{x}\mathbf{i} + (\dot{\phi}\mathbf{j}) \times (a\mathbf{j}) = (\dot{x} - a\dot{\phi})\mathbf{i}$$
Entonces $\dot{x} = a\dot{\phi}$ y, derivando, tenemos $\ddot{x} = a\ddot{\phi}$.

Mom. angular: $\boldsymbol{L}_G = I_G^{\text{disco}}\boldsymbol{\omega} \to \dot{\boldsymbol{L}}_G = \frac{1}{2}ma^2\ddot{\phi}\mathbf{k}$.
Mom. de las fuerzas: $\boldsymbol{M}_G^{\text{ext}} = \boldsymbol{r}_{GP} \times \boldsymbol{T} = -aT\mathbf{k}$
(solo $\boldsymbol{T}$ tiene momento no nulo con respecto a G).

Primera cardinal y *Segunda cardinal respecto a* G *(disco)*:

i) $T - kx = m\ddot{x}$
j) $2ka - mg - N = 0$
k) $-aT = \frac{1}{2}ma^2\ddot{\phi}$

$\to N = 2ka - mg$
$\to T = -\frac{1}{2}ma\ddot{\phi} = -\frac{1}{2}m\ddot{x}$ (usando $\ddot{x} = a\ddot{\phi}$)
$$\to -\frac{1}{2}m\ddot{x} - kx = m\ddot{x} \to \ddot{x} + \frac{2k}{3m}x = 0$$

La ecuación para x es de un *oscilador armónico* de frecuencia angular $\Omega = \sqrt{2k/3m}$. El sistema parte del reposo en $x = A$. La ley horaria es $x(t) = A\cos\Omega t$.

(II) Condiciones para que se mantenga el movimiento:

i) $N \geq 0$ (la normal debe ser saliente al plano de apoyo). Esto equivale a que se cumpla

$$2ka - mg \geq 0 \leftrightarrow k \geq \frac{mg}{2a}$$

ii) $|\boldsymbol{T}| \leq f|\boldsymbol{N}|$ (fuerza de fricción estática).

Observamos que $\boldsymbol{N}$ es constante; el módulo de $\boldsymbol{T}$ es máximo en los extremos de la oscilación, cuando $x = \pm A$:
$$|\boldsymbol{T}| \leq |\boldsymbol{T}|_{\text{máx}} = \frac{1}{2}m|\ddot{x}|_{\text{máx}} = \frac{1}{2}mA\Omega^2$$

La condición se cumple para todo tiempo si
$$|\boldsymbol{T}|_{\text{máx}} = \frac{1}{2}mA\Omega^2 \leq f|\boldsymbol{N}| = f(2ka - mg)$$
$$\leftrightarrow f \geq \frac{mA\Omega^2}{2(2ka - mg)} = \frac{1}{3}\frac{kA}{(2ka - mg)}$$

b) La fuerza neta y el momento neto sobre la placa deben ser cero en todo momento.

$$\boldsymbol{M}_Q^{\text{ext}} = \boldsymbol{r}_{QR} \times (\boldsymbol{T}' + \boldsymbol{N}') = (z\mathbf{i} - a\mathbf{j}) \times (T'\mathbf{i} + N'\mathbf{j})$$
$$= (zN' + aT')\mathbf{k}$$

Primera cardinal y segunda cardinal respecto a Q (placa):

i) $kx - T' = 0 \to T' = kx$
j) $N' - 2ka - mg = 0 \to N' = 2ka + mg$
k) $zN' - aT' = 0$
$$\to z = a\frac{T'}{N'} = \frac{akx}{2ka + mg} = \frac{x}{2 + \frac{mg}{ka}}$$

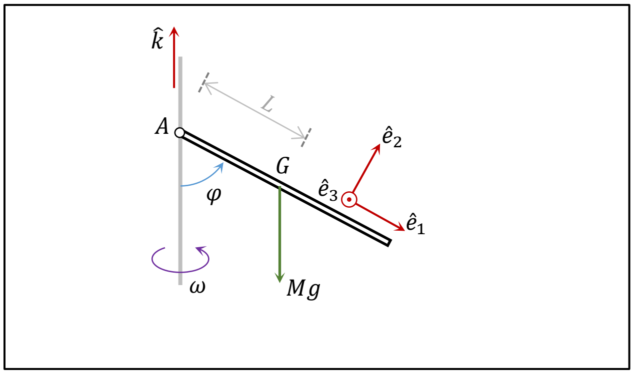
Recordemos que el valor máximo de $|x|$ es $|x|_{\text{máx}} = A$.
i) Se verifica trivialmente $N' \geq 0$.

ii) Para **no volcar:** $|z| \leq b$

$$\leftrightarrow \frac{|x|}{2 + \frac{mg}{ka}} \leq b \leftrightarrow \frac{A}{2 + \frac{mg}{ka}} \leq b \leftrightarrow A \leq \left(2 + \frac{mg}{ka}\right)b$$

iii) Para **no deslizar:** $|T'| \leq f|N'|$
$$\leftrightarrow k|x| \leq f(2ka + mg) \leftrightarrow A \leq 2fa + f\frac{mg}{k}$$

Ejercicio 3



Usamos la base de ejes principales $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ solidaria a la barra (ver figura) para calcular el momento angular de la barra con respecto a A. $\hat{k}$ es un vector unitario vertical tal que

$$\hat{k}\cdot\hat{e}_1 = -\cos\varphi,\ \hat{k}\cdot\hat{e}_2 = \sin\varphi, \quad \hat{k}\cdot\hat{e}_3 = 0$$

La velocidad angular del sistema y las derivadas de los vectores son

$$\vec{\omega} = \omega\hat{k} + \dot{\varphi}\hat{e}_3 = -\omega\cos\varphi\,\hat{e}_1 + \omega\sin\varphi\,\hat{e}_2 + \dot{\varphi}\hat{e}_3$$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{e}}_1 &= \vec{\omega}\times\hat{e}_1 = -\omega\sin\varphi\,\hat{e}_3 + \dot{\varphi}\hat{e}_2\\ \dot{\hat{e}}_2 &= \vec{\omega}\times\hat{e}_2 = -\omega\cos\varphi\,\hat{e}_3 - \dot{\varphi}\hat{e}_1\\ \dot{\hat{e}}_3 &= \vec{\omega}\times\hat{e}_3 = \omega\cos\varphi\,\hat{e}_2 + \omega\sin\varphi\,\hat{e}_1\end{aligned}$$

Momentos con respecto a A:

$$\begin{aligned}\vec{M}_A^{\text{ext}} &= \vec{M}_A^{\text{reac}} + L\hat{e}_1\times\left(-mg\,\hat{k}\right)\\ &= \vec{M}_A^{\text{reac}} - mgL\sin\varphi\ \hat{e}_1\times\hat{e}_2 = \vec{M}_A^{\text{reac}} - mgL\sin\varphi\,\hat{e}_3\end{aligned}$$

Solo el peso ejerce un momento según $\hat{e}_3$ porque la articulación cilíndrica es lisa: $\vec{M}_A^{\text{reac}}\cdot\hat{e}_3 = 0$

Segunda cardinal

con respecto a A (fijo), proyectada en $\hat{e}_3$:

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt}\cdot\hat{e}_3 = \vec{M}_A^{\text{ext}}\cdot\hat{e}_3$$

$$\rightarrow \frac{4mL^2}{3}\left(-\omega^2\sin\varphi\cos\varphi + \ddot{\varphi}\right) = -mgL\sin\varphi$$

$$\rightarrow\ \ddot{\varphi} - \left(\omega^2\cos\varphi - \frac{3g}{4L}\right)\sin\varphi = 0$$

b) El equilibrio relativo corresponde a $\dot{\varphi} = 0$ y $\ddot{\varphi} = 0$. Si esto se cumple, en la ecuación de movimiento queda

$$-\left(\omega^2\cos\varphi - \frac{3g}{4L}\right)\sin\varphi = 0$$

Para que se cumpla, alguno de los factores debe ser cero. Si $\sin\varphi = 0$, entonces $\varphi = 0$ o $\varphi = \pi$, que son posiciones verticales.

Tensor de inercia respecto al pto. A (usando ejes principales):

$$\mathbb{I}_A = \begin{bmatrix}\int_V \rho(x_2^2+x_3^2)\,dV & & \\ & \int_V \rho(x_1^2+x_3^2)dV & \\ & & \int_V \rho(x_1^2+x_2^2)dV\end{bmatrix}$$

$$= \left(\int_V \rho x_1^2\,dV\right)\begin{bmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix} = \frac{4mL^2}{3}\begin{bmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}$$

usando que $x_2 = x_3 = 0$ para este cuerpo. La integral es (si S es el área de la sección transversal de la barra, entonces $dV = Sdx, V = 2LS$ y $\rho = m/V$)

$$\int_V \rho x_1^2\,dV = \frac{m}{2LS}\int_0^{2L} x_1^2 S dx_1 = \frac{m}{2L}\frac{x_1^3}{3}\bigg|_0^{2L} = \frac{4mL^2}{3}$$

Momento angular:

$$\vec{L}_A = \mathbb{I}_A\vec{\omega} = \frac{4mL^2}{3}\left(\omega\sin\varphi\,\hat{e}_2 + \dot{\varphi}\hat{e}_3\right)$$

$$\begin{aligned}\rightarrow \frac{d\vec{L}_A}{dt} &= \frac{4mL^2}{3}\left(\omega\dot{\varphi}\cos\varphi\,\hat{e}_2 + \omega\sin\varphi\,\dot{\hat{e}}_2 + \ddot{\varphi}\hat{e}_3 + \dot{\varphi}\dot{\hat{e}}_3\right)\\ &= \frac{4mL^2}{3}\left[2\omega\dot{\varphi}\cos\varphi\,\hat{e}_2 + \left(\ddot{\varphi} - \omega^2\sin\varphi\cos\varphi\right)\hat{e}_3\right]\end{aligned}$$

Si $\omega^2\cos\varphi - \frac{3g}{4L} = 0$, entonces, dado un valor de ω, encontramos

$$\cos\varphi = \frac{3g}{4L\omega^2}$$

La ecuación tiene solución para $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ solamente si

$$\cos\varphi < 1 \leftrightarrow \frac{3g}{4L\omega^2} < 1 \leftrightarrow \omega > \sqrt{\frac{3g}{4L}}$$

(las desigualdades son estrictas porque el caso $\varphi = \frac{\pi}{2}$ no es físicamente realizable y el caso $\varphi = 0$ es vertical).

<u>*Alternativa*</u>: para buscar las posiciones de equilibrio se puede plantear un potencial efectivo $U_{\text{ef}}(\varphi)$. La ecuación de movimiento equivale a $\ddot{\varphi} + \frac{d}{d\varphi}U_{\text{ef}} = 0$

y los puntos de equilibrio corresponden a los extremos relativos de $U_{\text{ef}}(\varphi)$. El signo de $\frac{d^2}{d^2\varphi}U_{\text{ef}}(\varphi)$ indica la estabilidad de la posición.