

## Mecánica Newtoniana

### Examen, 28 de enero de 2021

- Duración de la prueba: **3 horas**.
- Mínimo para suficiencia: **un ejercicio completo y la mitad del global de la prueba**.
- *Datos*:
  - Momento de inercia de una barra homogénea, de masa  $M$  y largo  $L$  alrededor de un eje perpendicular a la misma pasando por su centro :  $I = \frac{ML^2}{12}$
  - Momento de inercia de un disco (homogéneo, de masa  $m$  y radio  $r$ ) alrededor de un eje perpendicular a su plano y pasando por su centro:  $I = \frac{1}{2}mr^2$ .

**Ejercicio 1** Una partícula de masa  $m$  se mueve bajo la influencia de una fuerza central  $\vec{F} = f\hat{e}_r$  de centro de fuerzas  $O$ .

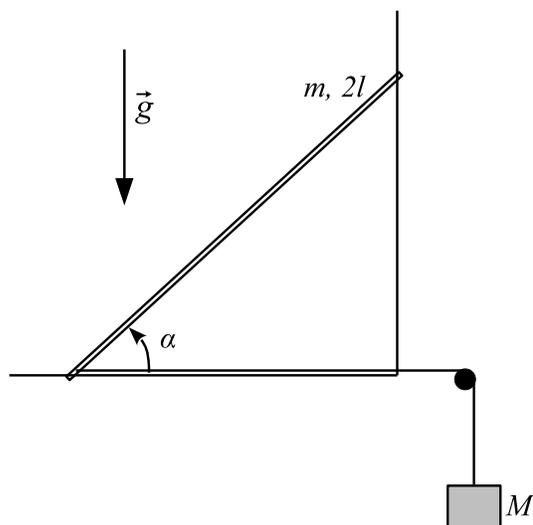
- a. Pruebe que el momento angular de la partícula con respecto a  $O$  se conserva.
- b. Considere de ahora en más que la fuerza central tiene la siguiente forma:

$$f = f(r) = -\frac{k}{r^2} - \frac{k'}{r^3},$$

con  $k, k' > 0$ . Inicialmente  $r = r_0$  (donde se cumple:  $kr_0 = k'$ ) y la velocidad de la partícula es de módulo  $v$  y perpendicular al vector posición.

- I. Halle  $v_C$ , el valor de  $v$  que asegura que la partícula se mueva siguiendo una órbita circular; determine el período de dicho movimiento.
- II. Para  $v = \sqrt{2}v_C$ , halle la órbita  $r = r(\theta)$  que describe la partícula.

**Ejercicio 2** Considere una barra homogénea de masa  $m$  y largo  $2l$  cuyos extremos se mueven sobre guías lisas (vínculo bilateral), una de ellas horizontal y la otra vertical. Un bloque de masa  $M$  cuelga de un hilo inextensible y de masa despreciable que lo une al extremo de la barra que se mueve sobre la guía horizontal. El hilo pasa a través de un soporte puntual, carente de fricción y a la altura de la guía horizontal. Inicialmente el sistema se encuentra en reposo y la barra forma un ángulo  $\alpha = \pi/4$  con la horizontal.



- a. Determine la masa  $M$  que permite mantener al sistema en reposo en la configuración especificada.

- b. Suponga ahora que el sistema parte del reposo pero la masa  $M$  es *la mitad* de la hallada anteriormente y que el hilo es lo suficientemente largo para que la masa no alcance el soporte puntual en su movimiento posterior. Bajo estas condiciones:
- I. Muestre que el ángulo  $\alpha$  satisface una ecuación de la forma:  $\dot{\alpha}^2 = f(\alpha)$ .
  - II. Halle la aceleración angular inicial de la barra.

**Ejercicio 3** Sea un cuerpo rígido formado por un disco homogéneo de masa  $m$ , centro  $A$  y radio  $a$  y una barra  $OA$  de masa despreciable, largo  $a$  y perpendicular al disco por su centro. La barra  $OA$  esta unida en  $O$  a un soporte vertical por medio de una articulación esférica lisa, situada a una altura  $a$  de un plano horizontal que gira respecto a un sistema inercial con velocidad angular constante  $\Omega$ , alrededor de la vertical que pasa por  $O$ . Inicialmente el disco esta en reposo, apoyado sobre este plano. El contacto entre el disco y el plano es rugoso, con coeficiente de rozamiento dinámico  $f$ . Se sugiere trabajar en este ejercicio en términos de  $\varphi$ , ángulo que forma  $OA$  con respecto a una horizontal fija al sistema inercial y  $\psi$ , ángulo de giro del disco alrededor de  $OA$  (ver figura).

- a. Halle el momento angular del rígido con respecto al punto  $O$ .
- b. Determine las ecuaciones de movimiento del rígido válidas mientras el mismo desliza con respecto al plano horizontal giratorio.

