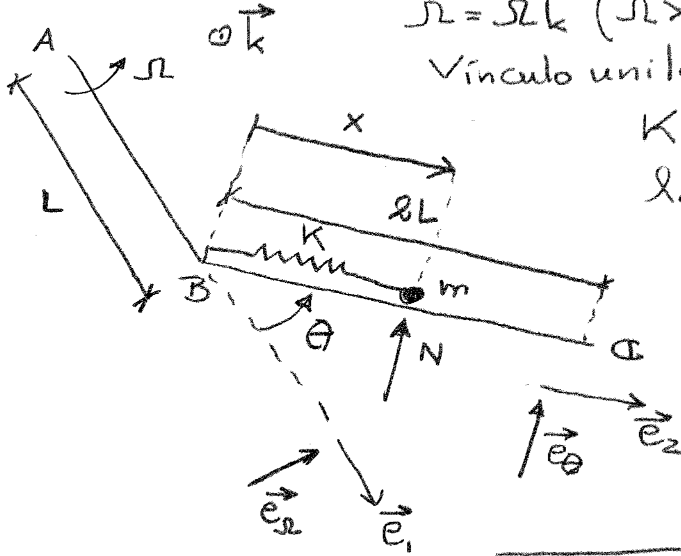
Ejercicio Nº1



$\vec{\Omega} = \Omega \vec{k}$ $(\Omega > 0)$

Vínculo unilateral $\Rightarrow N \geq 0$

$K = 2m\Omega^2$

$l_0 = 0$

parte a: $\theta(t)$ arbitrario

i) Primer Caso:

Sistema Móvil: Barra BC

Origen B

Versores: $\vec{e}_2, \vec{e}_\theta, \vec{k}$

$\vec{r}\,' = x\vec{e}_2 \equiv P - B$

Velocidad Relativa: $\boxed{\vec{v}\,' = \dot{x}\vec{e}_2}$

Aceleración ": $\boxed{\vec{a}\,' = \ddot{x}\vec{e}_2}$

Velocidad de Arrastre: $\vec{v}_T = \underbrace{\vec{v}_B}_{\Omega L \vec{e}_\Omega} + \underbrace{\vec{\omega}_{BC}}_{(\Omega+\dot{\theta})\vec{k}} \wedge \underbrace{(P-B)}_{x\vec{e}_2}$ $\qquad \vec{k}\wedge\vec{e}_2 = \vec{e}_\theta$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_T = \Omega L \vec{e}_\Omega + (\Omega+\dot{\theta})x\,\vec{e}_\theta}$$

Aceleración de Arrastre: $\vec{a}_T = \underbrace{\vec{a}_B}_{-\Omega^2 L\vec{e}_1} + \underbrace{\dot{\vec{\omega}}_{BC}}_{\ddot{\theta}\vec{k}} \wedge \vec{r}\,' + \underbrace{\vec{\omega}_{BC}\wedge(\vec{\omega}_{BC}\wedge\vec{r}\,')}_{x(\Omega+\dot{\theta})^2\,\vec{k}\wedge\vec{e}_\theta}$

$\underbrace{\ddot{\theta}\vec{k}\wedge\vec{r}\,'}_{x\ddot{\theta}\vec{e}_\theta}$ $\qquad \underbrace{\vec{k}\wedge\vec{e}_\theta}_{-\vec{e}_2}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_T = -L\Omega^2\vec{e}_1 + x\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta - x(\Omega+\dot{\theta})^2\,\vec{e}_2}$$

Aceleración de Coriolis: $\vec{a}_C = 2\vec{\omega}_{BC}\wedge\vec{v}\,' = 2(\Omega+\dot{\theta})\vec{k}\wedge\dot{x}\vec{e}_2 =$

$$\boxed{\vec{a}_C = 2(\Omega+\dot{\theta})\dot{x}\;\vec{e}_\theta}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{x}\,\vec{e}_2 + L\Omega\,\vec{e}_\Omega + x(\Omega+\dot{\theta})\,\vec{e}_\theta} \leftarrow \text{Roverbal}$$

Coriolis

$$\boxed{\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{e}_2 - L\Omega^2\vec{e}_1 + [x\ddot{\theta} + 2\dot{x}(\Omega+\dot{\theta})]\,\vec{e}_\theta - x(\Omega+\dot{\theta})^2\,\vec{e}_2}$$

Segundo Caso (Otra forma): Sistema Móvil: Barra AB

Origen: B

Versores: $\vec{e}_1, \vec{e}_\Omega, \vec{k}$

En este caso: $\vec{r}\,'$ es el mismo de antes, pero $\vec{e}_2$ es móvil respecto a AB.

$$\boxed{\vec{v}\,' = \dot{x}\vec{e}_2 + x\underbrace{\frac{d'\vec{e}_2}{dt}}_{\dot{\theta}\vec{e}_\theta} = \dot{x}\,\vec{e}_2 + x\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta}$$

$$\vec a' = \ddot x\,\vec e_z + 2\dot x\dot\theta\,\vec e_\theta + x\ddot\theta\,\vec e_\theta + x\dot\theta\,\underbrace{\frac{d\vec e_\theta}{dt}}_{=-\dot\theta\,\vec e_z}$$

$$\boxed{\vec a' = \left(\ddot x - x\dot\theta^2\right)\vec e_z + \left(2\dot x\dot\theta + x\ddot\theta\right)\vec e_\theta}$$

$$\boxed{\vec v_T = \underbrace{\vec v_B}_{=\Omega L\vec e_\Omega} + \underbrace{\vec\omega_{AB}}_{=\Omega\vec k}\wedge\vec r' = L\Omega\,\vec e_\Omega + x\Omega\,\vec e_\theta}$$

Mismo resultado de antes

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec v = \dot x\,\vec e_z + L\Omega\,\vec e_\Omega + x\left(\Omega + \dot\theta\right)\vec e_\theta}$$

$$\vec a_T = \underbrace{\vec a_B}_{=-L\Omega^2\vec e_1} + \underbrace{\dot{\vec\omega}_{AB}}_{=0}\wedge\vec r' + \underbrace{\vec\omega_{AB}\wedge\left(\vec\omega_{AB}\wedge\vec r'\right)}_{x\Omega^2\vec k\wedge\vec e_\theta = -x\Omega^2\vec e_z} = \boxed{-L\Omega^2\vec e_1 - x\Omega^2\vec e_z = \vec a_T}$$

$$\vec a_C = 2\vec\omega_{AB}\wedge\vec v' = 2\Omega\vec k\wedge\left(\dot x\,\vec e_z + x\dot\theta\,\vec e_\theta\right) = 2\dot x\Omega\,\vec e_\theta + 2\Omega x\dot\theta\left(-\vec e_z\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec a_C = 2\dot x\Omega\,\vec e_\theta - 2\Omega x\dot\theta\,\vec e_z}$$

$$\vec a = \left(\ddot x - x\dot\theta^2\right)\vec e_z + \left(2\dot x\dot\theta + x\ddot\theta\right)\vec e_\theta - L\Omega^2\vec e_1 - x\Omega^2\vec e_z + 2\dot x\Omega\,\vec e_\theta - 2\Omega x\dot\theta\,\vec e_z$$

$$2\dot x\left(\dot\theta + \Omega\right)\vec e_\theta$$

$$-x\left(\dot\theta + \Omega\right)^2\vec e_z$$

Recupero resultado anterior

<u>Otro método</u> para este mismo sistema relativo: Barra: AB
Origen: A
Versores: $\vec e_1, \vec e_\Omega, \vec k$

Ahora $\vec r' = P - A = L\vec e_1 + x\vec e_z$

Como L es cte y $\vec e_1$ es fijo en este sistema, $\vec v'$ y $\vec a'$ son los mismos.

$$\vec v_T = \underbrace{\vec v_A}_{=\vec 0} + \vec\omega_{AB}\wedge\vec r' = \Omega\vec k\wedge\left(L\vec e_1 + x\vec e_z\right) = L\Omega\,\vec e_\Omega + x\Omega\,\vec e_\theta$$

Es el mismo de antes

$$\vec a_T = \underbrace{\vec a_A}_{=0} + \underbrace{\dot{\vec\omega}_{AB}}_{=0}\wedge\vec r' + \vec\omega_{AB}\wedge\underbrace{\left(\vec\omega_{AB}\wedge\vec r'\right)}_{}$$

$$\Omega\vec k\wedge\left(L\Omega\,\vec e_\Omega + x\Omega\,\vec e_\theta\right)$$

$$\Rightarrow \vec a_T = -L\Omega^2\vec e_1 - x\Omega^2\vec e_z \quad \text{Idem.}$$

ii) $\vec r = L\vec e_1 + x\vec e_z \Rightarrow \vec v = L\underbrace{\dot{\vec e}_1}_{=\Omega\vec e_\Omega} + \dot x\,\vec e_z + x\underbrace{\dot{\vec e}_z}_{=(\Omega+\dot\theta)\vec e_\theta} = L\Omega\,\vec e_\Omega + \dot x\,\vec e_z + x\left(\Omega + \dot\theta\right)\vec e_\theta$

Mismo resultado que por i)

$$\vec a = L\Omega\underbrace{\dot{\vec e}_\Omega}_{=-\Omega\vec e_1} + \ddot x\,\vec e_z + 2\dot x\left(\Omega + \dot\theta\right)\vec e_\theta + x\ddot\theta\,\vec e_\theta + x\left(\Omega + \dot\theta\right)\underbrace{\dot{\vec e}_\theta}_{=-(\Omega+\dot\theta)\vec e_z}$$

$$\vec a = -L\Omega^2\vec e_1 + \left[\ddot x - x\left(\Omega + \dot\theta\right)^2\right]\vec e_z + \left[x\ddot\theta + 2\dot x\left(\Omega + \dot\theta\right)\right]\vec e_\theta$$

Idem.

parte b:

$\dot{\theta}(t) = \Omega$

$\theta(0) = \dfrac{\pi}{2}$

$x(0) = L$

$\dot{x}(0) = 0$

No deslizamiento: $|T| \leq \mu_s |N|$

$$m\vec{a} = T\vec{e}_z + N\vec{e}_\theta - Kx\,\vec{e}_z$$

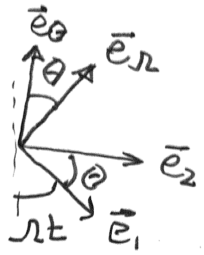
$$x(t) = 0 \Rightarrow \vec{a} = -L\Omega^2\vec{e}_1 - 4x\Omega^2\vec{e}_z$$

$$\ddot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow T - Kx = m\Big(-L\Omega^2 \underbrace{\vec{e}_z\cdot\vec{e}_1}_{\cos\theta} - 4x\Omega^2\Big)$$

$$\Rightarrow T = Kx - mL\Omega^2\cos\theta - 4mx\Omega^2$$

$$N = -mL\Omega^2 \underbrace{\vec{e}_1\cdot\vec{e}_\theta}_{-\operatorname{sen}\theta} = mL\Omega^2\operatorname{sen}\theta$$



En $\theta(0) = \dfrac{\pi}{2}$ $\quad N = mL\Omega^2 > 0$

$$T = \underset{\substack{\shortparallel \\ 2m\Omega^2}}{K}x - 4mx\Omega^2 = -2mx\Omega^2 \underset{t=0}{=} -2mL\Omega^2$$

$$2\cancel{m}\cancel{L}\cancel{\Omega^2} \leq \mu_s \cancel{m}\cancel{L}\cancel{\Omega^2} \Rightarrow \boxed{\mu_s \geq 2}$$

parte c: $\theta(t) = \dfrac{\pi}{2}$, $\dot{x}(0) = 0$, $x(0) = L$ guía lisa

La partícula deja de estar apoyada cuando N cambia de signo: $m\vec{a} = N\vec{e}_\theta - Kx\vec{e}_z$ (T=0 porque la guía ahora es lisa)

$$\ddot{x}\vec{e}_z - L\Omega^2\vec{e}_1 + 2\dot{x}\Omega\vec{e}_\theta - x\Omega^2\vec{e}_z$$

$\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ son nulas pero $x(t)$ variable (hay movimiento)

$$\theta(t) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{e}_z = \vec{e}_\Omega, \quad \vec{e}_\theta = -\vec{e}_1$$

$$N = m\Big(\ddot{x}\underbrace{\vec{e}_z\cdot\vec{e}_\theta}_{0} - L\Omega^2\underbrace{\vec{e}_1\cdot\vec{e}_\theta}_{-1} + 2\dot{x}\Omega - x\Omega^2\underbrace{\vec{e}_z\cdot\vec{e}_\theta}_{0}\Big)$$

$$N = m(L\Omega^2 + 2\dot{x}\Omega) \geq 0$$

$\Omega > 0 \Rightarrow \dot{x} \geq -\dfrac{L\Omega}{2}$ ← para hallar el instante en que esta condición deja de cumplirse, hay que hallar $\dot{x}(t)$

Ec de mov: $m\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{e}_z}_{\ddot{x} - x\Omega^2} = -Kx \Rightarrow m\ddot{x} + (K - m\Omega^2)x = 0$

$$K = 2m\Omega^2 \Rightarrow \ddot{x} + \Omega^2 x = 0$$

Esta ec. tiene soluciones de la forma:

$$x(t) = A\cos\Omega t + B\operatorname{sen}\Omega t$$

$$x(0)=L \Rightarrow A=L$$
$$\dot{x}(0)=0 \Rightarrow B=0$$
$$\Rightarrow x(t)=L\cos\Omega t$$
$$\dot{x}(t)=-L\Omega\,\text{sen}\,\Omega t$$

$$-\cancel{L\Omega}\,\text{sen}\,\Omega t \geq -\frac{\cancel{L\Omega}}{2}$$

$$\text{sen}\,\Omega t \leq \frac{1}{2}$$

$$\Omega t \leq \frac{\pi}{6} \Rightarrow t \leq \frac{\pi}{6\Omega}$$

La partícula deja de estar apoyada en $\boxed{t=\frac{\pi}{6\Omega}}$

<u>Otra forma</u>; preintegrando: $\ddot{x}=-\Omega^2 x$

$$\frac{\dot{x}^2}{2}=-\Omega^2\frac{x^2}{2}\Big|_L^x=\frac{\Omega^2(L^2-x^2)}{2}$$

$\dot{x}^2=\Omega^2(L^2-x^2) \longrightarrow \dot{x}^2\geq 0 \Rightarrow x\leq L=x(0) \Rightarrow x$ decrece en t posterior $\Rightarrow \dot{x}(t)$ debe ser <0.

$$\dot{x}=\pm\Omega\sqrt{L^2-x^2}$$

$\uparrow$ Observar que $\ddot{x}(0)=-\Omega^2 x(0)=-\Omega^2 L<0$

$\Rightarrow \dot{x}$ decrece; y como $\dot{x}(0)=0$, en un instante posterior debe ser negativo $\Rightarrow \dot{x}=-\Omega\sqrt{L^2-x^2}$

$$\Rightarrow \dot{x}=-\Omega\sqrt{L^2-x^2}\geq -\frac{L\Omega}{2} \sim \sqrt{L^2-x^2}\leq\frac{L}{2}$$

$$L^2-x^2\leq\frac{L^2}{4} \Rightarrow x^2\geq\frac{3L^2}{4}$$

$$x\geq\frac{\sqrt{3}}{2}L$$

$$\int_0^t\frac{\dot{x}\,dt}{\sqrt{L^2-x^2}}=-\int_0^t\Omega\,dt=-\Omega t$$

$$\shortparallel$$

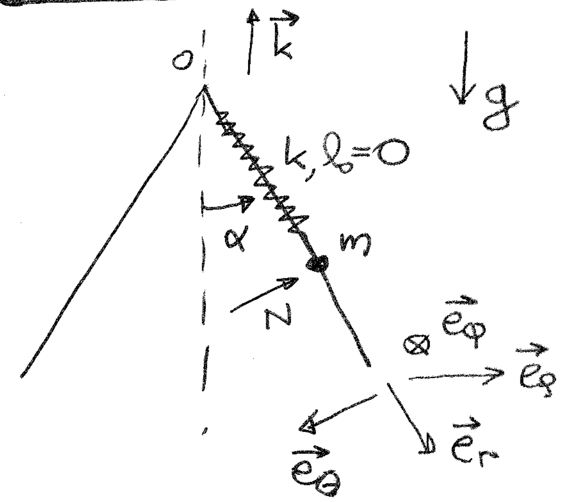
$$\int_{x(0)}^{x}\frac{dx}{\sqrt{L^2-x^2}}=\text{Arcsen}\frac{x}{L}\Big|_L^x=\text{Arcsen}\frac{x}{L}-\underbrace{\text{Arcsen}\,1}_{=\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow x(t)=L\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\Omega t\right)=L\cos\Omega t\geq\frac{\sqrt{3}}{2}L$$

$$\cos\Omega t\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Omega t\leq\frac{\pi}{6}$$ Mismo resultado de antes

Ejercicio N°2



$z(0) = -H$

$z_0 = 0$

$\vec{v}(0) = v_0 \vec{e}_\varphi$

parte a: $\vec{L}_0 = m \underbrace{\vec{r}}_{P-O} \wedge \underbrace{\vec{v}}_{\dot{\vec{r}}}$

i) $\dfrac{d\vec{L}_0}{dt} = \underbrace{m \dot{\vec{r}} \wedge \underbrace{\vec{v}}_{\dot{\vec{r}}}}_{\vec{0}} + m \vec{r} \wedge \underbrace{\dot{\vec{v}}}_{\vec{a}}$

$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \boxed{\dfrac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}}$

ii) $\vec{F} = -mg\vec{k} - N\vec{e}_\theta - kr\,\vec{e}_r \qquad r = |\vec{r}|$

$\dfrac{d\vec{L}_0}{dt} = \underbrace{\vec{r}}_{r\vec{e}_r} \wedge (-mg\vec{k} - N\vec{e}_\theta \underbrace{- kr\vec{e}_r}_{\text{su producto } \wedge \text{ } \vec{e}_r \text{ es nulo}})$

$\dfrac{d\vec{L}_0}{dt} \cdot \vec{k} = [\underbrace{r\vec{e}_r \wedge (-mg\vec{k}}_{\text{este } \wedge \text{ es } \perp \text{ a } \vec{k} \Rightarrow \text{ su proyección según } \vec{k} \text{ es nula.}} - N\vec{e}_\theta)] \cdot \vec{k}$

$\dfrac{d\vec{L}_0}{dt} \cdot \vec{k} = -Nr\,\underbrace{(\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta)}_{\vec{e}_\varphi} \cdot \vec{k} = 0$

Pero $\vec{k}$ es fijo $(\dot{\vec{k}} = \vec{0}) \Rightarrow \dfrac{d(\vec{L}_0 \cdot \vec{k})}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{L}_0 \cdot \vec{k} = cte}$

Otra forma: $\vec{L}_0 = m\vec{r} \wedge \underbrace{\vec{v}}_{\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r}$

$\vec{e}_r = \operatorname{sen}\alpha\, \vec{e}_\rho - \cos\alpha\, \vec{k}$

$\dot{\vec{e}}_r = \operatorname{sen}\alpha\, \dot{\vec{e}}_\rho = \operatorname{sen}\alpha\, \dot{\varphi}\, \vec{e}_\varphi$ ($\varphi \to$ ángulo azimutal de coordenadas esféricas o ángulo de coordenadas cilíndricas)

$\vec{L}_0 = m r \vec{e}_r \wedge (r \operatorname{sen}\alpha\, \dot{\varphi}\, \vec{e}_\varphi) =$

$= m r^2 \operatorname{sen}\alpha\, \dot{\varphi}\, (-\vec{e}_\theta)$

$\vec{L}_0 \cdot \vec{k} = -m \operatorname{sen}\alpha\, r^2 \dot{\varphi}\, \underbrace{\vec{e}_\theta \cdot \vec{k}}_{-\operatorname{sen}\alpha} = m \operatorname{sen}^2\alpha\, r^2 \dot{\varphi}$

$\dfrac{d}{dt}(\vec{L}_0 \cdot \vec{k}) = m \operatorname{sen}^2\alpha\, (2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi}) = m r \operatorname{sen}^2\alpha\, (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})$

1^{er} Parcial
Mecánica Newtoniana
(1122)
4/5/2019

Aplicando Newton y observando que el cono es liso y no hay fuerza externa según $\vec{e}_\varphi$: $\vec{a}\cdot\vec{e}_\varphi = 0$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\,\text{sen}\,\alpha\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r + 2\dot{r}\,\text{sen}\,\alpha\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + r\,\text{sen}\,\alpha\,\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + r\,\text{sen}\,\alpha\,\dot{\varphi}\,\underbrace{\dot{\vec{e}}_\varphi}_{= -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{e}_\varphi = 2\dot{r}\,\text{sen}\,\alpha\,\dot{\varphi} + r\,\text{sen}\,\alpha\,\ddot{\varphi}$$

$$= \text{sen}\,\alpha\,(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \Rightarrow 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0$$

(sen $\alpha \neq 0$ xq para $\alpha = 0, \pi$ no hay cono)

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_0\cdot\vec{k}) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{L}_0\cdot\vec{k} = cte$$

La misma demostración <u>en cilíndricas</u> sería:

$$\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{L}_0 = m(\rho\vec{e}_\rho + z\vec{k})\wedge(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{k}) =$$

$$= m(z\dot{\rho}\,\vec{e}_\varphi + \rho^2\dot{\varphi}\vec{k} - z\rho\dot{\varphi}\,\vec{e}_\rho - \rho\dot{z}\,\vec{e}_\varphi)$$

$$\vec{L}_0\cdot\vec{k} = \rho^2\dot{\varphi}\,m$$

$$\frac{d(\vec{L}_0\cdot\vec{k})}{dt} = m(2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho^2\ddot{\varphi}) = m\rho(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})$$

Procediendo como antes: $\vec{a}\cdot\vec{e}_\varphi = 0$

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{e}_\varphi = 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{L}_0\cdot\vec{k}) = 0 \text{ y } \vec{L}_0\cdot\vec{k} = cte$$

<u>parte b</u>: $\vec{L}_0\cdot\vec{k} = cte \Rightarrow$ x la parte anterior: (1) $\boxed{r^2\dot{\varphi} = cte}$ (en esféricas)

(2) $\boxed{\rho^2\dot{\varphi} = cte}$ (en cilíndricas)

Pero además el sist. es conservativo:

$-mg\vec{k}$ conservativa $U_g = mgz$ (en cilíndricas)

$z = -r\cos\alpha \Rightarrow U_g = -mgr\cos\alpha$ (en esféricas)

resorte conservativo: $U_k = \frac{kr^2}{2}$ (en esféricas)

$\rho = r\,\text{sen}\,\alpha \Rightarrow U_k = \frac{k\rho^2}{2\,\text{sen}^2\alpha}$ (en cilíndricas)

1^er^ Parcial
Mecánica Newtoniana
(1122)
4/5/2019

Y la normal es de potencia nula (superficie lisa)

$$\Rightarrow \underset{\frac{m\vec{v}^2}{2}}{T} + \underset{U_g+U_k}{U} = E \ (\text{cte})$$

Método 1 (en esféricas):

$$\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\alpha\, \dot{\varphi}^2\right) - mgr\cos\alpha + \frac{kr^2}{2} = E$$

X la 1ª ley de conservación: $r^2\dot{\varphi} = r(0)^2\dot{\varphi}(0) = \mathbb{C}$ (cte)

$$\boxed{\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha\, \mathbb{C}^2}{r^2}\right) - mgr\cos\alpha + \frac{kr^2}{2} = E} \quad (3)$$

Método 2 (en cilíndricas):

$$\frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) + mgz + \frac{k\rho^2}{2\operatorname{sen}^2\alpha} = E$$

Se puede dejar expresado en función de ρ o en función de z:

Porque: $r = -\frac{z}{\cos\alpha} = \frac{\rho}{\operatorname{sen}\alpha} \Rightarrow \rho = -\operatorname{tg}\alpha\, z$ $\left(\text{o } z = -\frac{\rho}{\operatorname{tg}\alpha}\right)$

(Obs: $z \leq 0 \Rightarrow \rho \geq 0$ si $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$)

Y la 1^er^ ley de conservación es $\rho^2\dot{\varphi} = \rho(0)^2\dot{\varphi}(0) = \mathbb{C}'$ cte

En función de ρ: $\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 = \dot{\rho}^2\left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}\right) = \frac{\dot{\rho}^2}{\operatorname{sen}^2\alpha}$

$$\boxed{\frac{m}{2}\left(\frac{\dot{\rho}^2}{\operatorname{sen}^2\alpha} + \frac{\mathbb{C}'^2}{\rho^2}\right) - \frac{mg\rho}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{k\rho^2}{2\operatorname{sen}^2\alpha} = E} \quad (4)$$

Obs: Es la misma ec de antes si $\rho \to r\operatorname{sen}\alpha$
$\mathbb{C}' \to \mathbb{C}\operatorname{sen}^2\alpha$

En función de z: $\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 = \dot{z}^2(\operatorname{tg}^2\alpha + 1) = \frac{\dot{z}^2}{\cos^2\alpha}$

$$\boxed{\frac{m}{2}\left(\frac{\dot{z}^2}{\cos^2\alpha} + \frac{\mathbb{C}'^2}{\operatorname{tg}^2\alpha\, z^2}\right) + mgz + \frac{kz^2}{2\cos^2\alpha} = E} \quad (5)$$

Y como la partícula se mueve en una superficie se precisan 2 coordenadas para describir su movimiento; por lo tanto con 2 leyes de conservación para describir su movimiento que son (1) o (2), que son equivalentes entre sí y (3), (4) o (5), que también lo son entre sí.

En esféricas, las 2 coordenadas son r y φ. ($\theta = cte$) y en cilíndricas son φ y una de ρ y z que son proporcionales entre sí.

parte c: En esféricas: $z(0) = -H \Rightarrow r(0) = \dfrac{H}{\cos\alpha}$

$$\vec{v}(0) = v_0 \vec{e}_\varphi = \underbrace{\dot{r}(0)}_{0}\vec{e}_r + \underbrace{r(0)}_{\frac{H}{\cos\alpha}} \operatorname{sen}\alpha\, \dot{\varphi}(0)\, \vec{e}_\varphi \Rightarrow \dot{\varphi}(0) = \frac{v_0}{H \operatorname{tg}\alpha}$$

$$\mathbb{C} = \frac{H^{\cancel{2}}}{\cos^2\alpha} \frac{v_0}{\cancel{H} \operatorname{tg}\alpha} = \frac{H v_0}{\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}$$

$$\Rightarrow E = \frac{m}{2} \frac{\cancel{\operatorname{sen}^2\alpha}}{\cancel{\frac{H^2}{\cos^2\alpha}}} \frac{\cancel{H^2} v_0^2}{\cancel{\operatorname{sen}^2\alpha \cos^2\alpha}} - mgH + \frac{kH^2}{2\cos^2\alpha}$$

$$\Rightarrow E = \frac{m v_0^2}{2} - mgH + \frac{kH^2}{2\cos^2\alpha}$$

Luego, si quiero que $z = -\frac{H}{2}$ sea máxima $\Rightarrow \dot{z} = 0$ en $z = -\frac{H}{2}$ $\sim \dot{r} = 0$

$$\left(-H + \frac{H}{2} = -\frac{H}{2}\right)$$

$$r = \frac{H}{2\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2} \frac{\cancel{\operatorname{sen}^2\alpha}}{\frac{H^2}{4\cancel{\cos^2\alpha}}} \frac{\cancel{H^2} v_0^2}{\cancel{\operatorname{sen}^2\alpha}\cos^2\alpha} - mg\frac{H}{2} + \frac{kH^2}{8\cos^2\alpha} = E$$

$$2 m v_0^2 - mg\frac{H}{2} + \frac{kH^2}{8\cos^2\alpha} = \frac{m v_0^2}{2} - mgH + \frac{kH^2}{2\cos^2\alpha}$$

$$\frac{3 m v_0^2}{\cancel{2}} = \frac{kH^2}{\cancel{2}\cos^2\alpha} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{4}\right)}_{3/4} - \frac{mgH}{\cancel{2}}$$

$$\boxed{v_0^2 = \frac{kH^2}{4m\cos^2\alpha} - \frac{gH}{3}}$$

$$v_0^2 \geq 0 \Rightarrow \boxed{k \geq \frac{4 mg\cos^2\alpha}{3H}} = k_{min}$$

En cilíndricas es equivalente $z(0) = -H \Rightarrow \rho(0) = \operatorname{tg}\alpha H$

$$\vec{v}(0) = v_0 \vec{e}_\varphi = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\dot{\rho}(0)} \vec{e}_\rho + \rho(0)\dot{\varphi}(0)\vec{e}_\varphi + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\dot{z}(0)}\vec{k}$$

$$v_0 = \operatorname{tg}\alpha H \dot{\varphi}(0) \Rightarrow \dot{\varphi}(0) = \frac{v_0}{\operatorname{tg}\alpha H}$$

$$C' = \rho^2(0)\dot{\varphi}(0) = \operatorname{tg}^2\alpha H^2 \frac{v_0}{\cancel{\operatorname{tg}\alpha H}} \Rightarrow C' = v_0 H \operatorname{tg}\alpha$$

$$\left(\text{Obs: } C' = \underset{\overset{\shortparallel}{\frac{H v_0}{\operatorname{sen}^2 \cos\alpha}}}{C} \operatorname{sen}^2\alpha = H v_0 \operatorname{tg}\alpha\right)$$

Trabajando con (5)

$$E = \frac{m}{2}\frac{\cancel{H^2} v_0^2 \cancel{\operatorname{tg}^2\alpha}}{\cancel{\operatorname{tg}^2\alpha \; H^2}} - mgH + \frac{kH^2}{2\cos^2\alpha} \leftarrow$$

mismo valor de antes

Luego $\dot{z} = 0$ en $z = -\frac{H}{2}$

$$\frac{m}{2}\frac{v_0^2 \cancel{H^2} \cancel{\operatorname{tg}^2\alpha}}{\cancel{\operatorname{tg}^2\alpha} \frac{H^2}{4}} - mg\frac{H}{2} + \frac{kH^2}{8\cos^2\alpha} = E \leftarrow$$

Misma ec. de antes
$\Rightarrow$ llego al mismo resultado