Instituto de Física
Mecánica Newtoniana
Hoja de fórmulas, segunda parte.

Sistema de partículas:

Posición del centro de masa:

$$\vec{r}_G = \frac{1}{M}\sum_i m_i\,\vec{r}_i \quad \text{con } M = \sum_i m_i$$

Cantidad de movimiento total: $\vec{P} = M\,\vec{v}_G$

Primera ecuación cardinal:

$$\dot{\vec{P}} = M\vec{a}_G = \vec{R}^{(ext)} \;\; \text{donde } \vec{R}^{(ext)} = \sum_i \vec{F}_i^{(ext)} \text{ es la resultante de fuerzas externas.}$$

Momento angular respecto al punto Q:

$$\vec{L}_Q = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_Q)\times m_i\vec{v}_i \quad \text{además se verifica: } \vec{L}_{Q_2} = \vec{L}_{Q_1} + \vec{P}\times(\vec{r}_{Q_2} - \vec{r}_{Q_1})$$

Segunda ecuación cardinal:

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = M\,\vec{v}_G\times\dot{\vec{r}}_Q + \vec{\mathcal{M}}_Q^{(ext)} \quad \text{donde } \; \vec{\mathcal{M}}_Q^{(ext)} = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_Q)\times\vec{F}_i^{(ext)}$$

$\vec{\mathcal{M}}_Q^{(ext)}$ es el momento de las fuerzas externas respecto de Q.

$$\vec{\mathcal{M}}_{Q_2}^{(ext)} = \vec{\mathcal{M}}_{Q_1}^{(ext)} + \vec{R}^{(ext)}\times(\vec{r}_{Q_2} - \vec{r}_{Q_1})$$

Energía Cinética:

$$T = \sum_i \frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2} = \frac{1}{2}M\vec{v}_G^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i\dot{\vec{\rho}}_i^{\,2} \;\; \text{donde } \; \vec{\rho}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_G$$

Sistemas Rígidos:

Distribución de velocidades: $\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega}\times(\vec{r}_P - \vec{r}_O)$
donde P y O son dos puntos cualquiera **del rígido** y $\vec{\omega}$ es la velocidad angular del rígido.

Momento angular: $\vec{L}_P = M(\vec{r}_G - \vec{r}_P)\times\vec{v}_P + \mathbb{I}_P\,\vec{\omega}$
donde $\vec{v}_P$ es la velocidad del punto del rígido que instantáneamente coincide con P.

Energía cinética:

$$T = \frac{1}{2}M\vec{v}_P^2 + M\vec{v}_P\cdot[\vec{\omega}\times(\vec{r}_G - \vec{r}_P)] + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\mathbb{I}_P\vec{\omega}$$

Componentes $\alpha\beta$ del Tensor de Inercia del rígido respecto al punto P ($\mathbb{I}_P$):

$$(\mathbb{I}_P)_{\alpha\beta} = \sum_i \left\{ m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_P)^2 \delta_{\alpha\beta} - m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_P)_\alpha (\vec{r}_i - \vec{r}_P)_\beta \right\}$$

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Momentos de Inercia: $I_{P\vec{u}} = \vec{u} \cdot \mathbb{I}_P \vec{u} = \sum_i m_i d_i^2$
siendo d_i la distancia del punto i-ésimo a la recta $P\vec{u}$.

Teorema de Steiner: $\mathbb{I}_P = \mathbb{I}_G + \mathbb{I}_P^{(M,G)}$ G es el centro de masa, P un punto cualquiera y

$$\left(\mathbb{I}_P^{(M,G)}\right)_{\alpha\beta} = M(\vec{r}_G - \vec{r}_P)^2 \delta_{\alpha\beta} - M(\vec{r}_G - \vec{r}_P)_\alpha (\vec{r}_G - \vec{r}_P)_\beta$$

Teorema de Steiner para momentos de inercia: $I_{P\vec{u}} = I_{G\vec{u}} + M\, d^2$
donde d es la distancia del baricentro G a la recta $P\vec{u}$.

Potencia de fuerzas externas: $\mathcal{P} = \vec{R}^{(ext)} \cdot \vec{v}_O + \vec{\mathcal{M}}_O^{(ext)} \cdot \vec{\omega} = \dfrac{dT}{dt}$
donde $\vec{v}_O$ es la velocidad del punto del rígido que instantáneamente coincide con O.