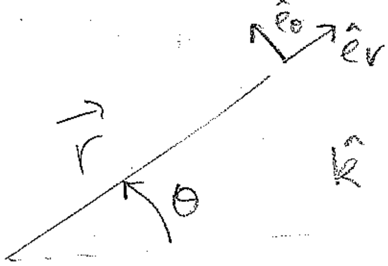
Problema 1

a) $\longrightarrow \vec{L} = m\vec{r}\wedge\vec{v}$ $\qquad$ $\vec{F} \parallel \vec{r}$ (fuerza central)

$$\longrightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \cancel{m\frac{d\vec{r}}{dt}\wedge\vec{v}}^{\,0} + \vec{r}\wedge m\vec{a} = \vec{r}\wedge\vec{F} \overset{\downarrow}{=} 0$$

Obs $\vec{L} = m\vec{r}\wedge\vec{v}$ es constante $\Rightarrow$ el movimiento transcurre en el plano perpendicular a $\vec{L}$.
El plano es aquel determinado por los vectores $\vec{r}(t=0)$ y $\vec{v}(t=0)$.
($\vec{L} = \vec{r}(t=0)\wedge\vec{v}(t=0)$ es perp a dicho plano)

b) $\longrightarrow$ Movimiento en el plano



$$\left.\begin{aligned} \vec{r} &= r\hat{e}_r \\ \vec{v} &= \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{L} = \underbrace{mr^2\dot{\theta}}_{\ell\ (cte)}\hat{k}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{e}_\theta$$

$\longrightarrow$ Fuerza cons: $\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\vec{\nabla}\left(\frac{-k}{r^2}\right) = -\frac{2k}{r^3}\hat{e}_r$

$\longrightarrow$ Ec de Newton $\left\{\begin{aligned} &\hat{e}_r)\ m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{2k}{r^3} \\ &\hat{e}_\theta)\ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \end{aligned}\right.$ (Equiv cons ℓ)

$\Longrightarrow$ La ecuación de movimiento queda

$$\boxed{m\ddot{r} - \frac{\ell^2}{mr^3} = -\frac{2k}{r^3}}$$

2

→ Cambio de variable $u(\theta) = \dfrac{1}{r}$
(tomada como función de θ)

$$\Rightarrow \underset{u'}{\frac{du}{d\theta}} = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{d\theta} = -\frac{\dot r}{r^2}\frac{1}{\dot\theta} = -\frac{m\dot r}{\ell}$$

$$u'' = \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{m}{\ell}\frac{d\dot r}{dt}\cdot\frac{dt}{d\theta} = -\frac{m}{\ell}\ddot r\frac{1}{\dot\theta} = -\frac{m^2r^2\ddot r}{\ell^2}$$

$$\Rightarrow \ddot r = -\frac{\ell^2 u'' u^2}{m^2}$$

→ Sustituyendo en la ec de mov tenemos

$$-m\ell^2\frac{u''u^2}{m^2} - u^3\left(\frac{\ell^2}{m} - 2k\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{u'' + u\left(1 - 2\frac{km}{\ell^2}\right) = 0}$$

→ Condiciones iniciales $\left\{\begin{array}{l} \vec r\,|_{t=0} = r_0\hat e_r \\ \vec v\,|_{t=0} = v_0\hat e_\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} r(0) = r_0 \\ \dot r(0) = 0 \\ (r\dot\theta)(0) = v_0 \end{array}$

* Medimos θ de manera que $\theta(t=0) = 0$

$$\Rightarrow u(\theta=0) = \frac{1}{r(t=0)} = \frac{1}{r_0}$$

$$u'(\theta=0) = -\frac{m}{\ell}\dot r(t=0) = 0$$

$$\ell = mr^2(t=0)\,\dot\theta(t=0) = mr_0v_0$$

→ La ecuación para u es

$$\begin{cases} u'' + u H = 0 & \text{con } H = 1 - 2\dfrac{k}{m r_0^2 v_0^2} \\ u(\theta=0) = \dfrac{1}{r_0} & u'(\theta=0) = 0 \end{cases}$$

Caso 1 $H > 0$

$$u(\theta) = \frac{1}{r_0}\cos(\sqrt{H}\,\theta)$$ Obs $u(0) = \frac{1}{r_0}$

$u'(0) = -\frac{\sqrt{H}}{r_0}\sin(\sqrt{H}\,0) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{r(\theta) = \frac{r_0}{\cos(\sqrt{H}\,\theta)}}$$

Ecuación para la trayectoria en el caso $H > 0$

Obs $r(\theta) \xrightarrow[\theta \to \frac{\pi}{2\sqrt{H}}]{} \infty$ Trayectoria no acotada

Caso 2 $H < 0$

$$\Rightarrow r(\theta) = \frac{r_0}{\cosh(\sqrt{H}\,\theta)}$$

Obs $\cosh(\sqrt{H}\,\theta) > 1 \quad \forall\theta \Rightarrow r(\theta) \leq r_0 \, \forall\theta$

Trayectorias acotadas

La condición para trayectorias acotadas es $\boxed{H < 0}$

d) $m r^2 \dot{\theta} = \ell$

$$1 = \frac{m r^2}{\ell}\dot{\theta} = \frac{m r^2}{\ell}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^t dt'}_{t} = \int_0^t dt' \frac{m r^2}{\ell}\frac{d\theta}{dt'} = \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} d\theta' \frac{m r^2(\theta')}{\ell} =$$

$$= \int_0^{\theta(t)} d\theta' \frac{m r_0^2}{\ell \cos^2(\sqrt{H}\theta')} = \frac{m r_0^2}{\ell\sqrt{H}} \operatorname{tg}(\sqrt{H}\,\theta(t))$$

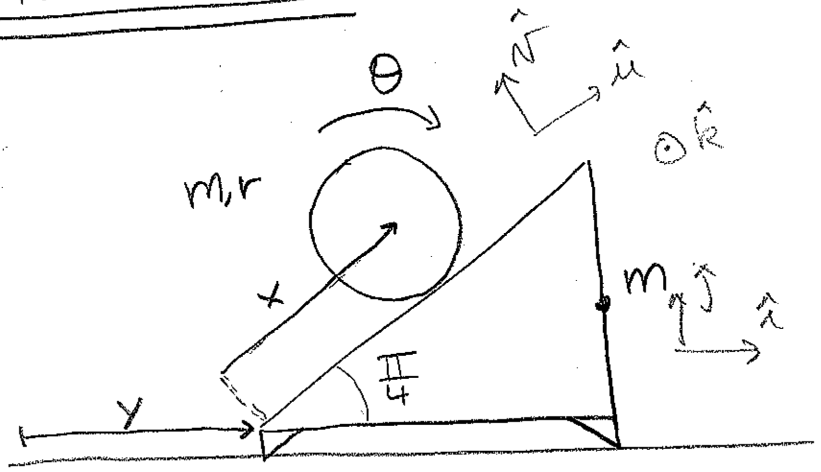
$\Rightarrow$ En un tiempo t, la partícula se encuentra en una posición dada por

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{H}} \operatorname{atan}\left(\frac{\ell\sqrt{H}}{m r_0^2} t\right)$$

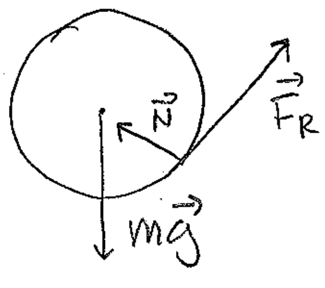
$$r(\theta) = \frac{r_0}{\cos\left(\operatorname{atan}\left(\frac{\ell\sqrt{H}}{m r_0^2} t\right)\right)} =$$

$$= \frac{r_0}{\sqrt{\left(\frac{\ell\sqrt{H}}{m r_0^2} t\right)^2 + 1}}$$

Problema 2



→ Cards disco



1era Card

① $\hat{u}$) $m\left(\ddot{x} + \frac{\ddot{y}}{\sqrt{2}}\right) = F_R - \frac{mg}{\sqrt{2}}$

② $\hat{v}$) $-m\frac{\ddot{y}}{\sqrt{2}} = N - \frac{mg}{\sqrt{2}}$

2da Card

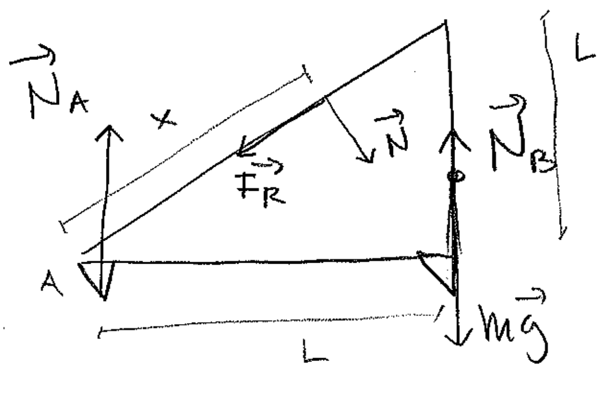
③ $\hat{k}$) $-\frac{mr^2}{2}\ddot{\theta} = rF_R$

→ Cards placa

1era Card

④ $\hat{i}$) $m\ddot{y} = \frac{N}{\sqrt{2}} - \frac{F_R}{\sqrt{2}}$

⑤ $\hat{j}$) $0 = N_A + N_B - \frac{F_R}{\sqrt{2}} - \frac{N}{\sqrt{2}} - m$



→ En las ecs anteriores asumimos que la placa no vuelca

→ Si el disco desliza ⇒ $F_R = fN = 2N$

* Para que esto se cumpla es necesario que $\dot{\theta}R > \dot{x}\ \forall t$

→ Tenemos el sist de 3 ecs y 3 incogs.
(ecs 1, 2 y 4)

$$\begin{cases} m\left(\ddot{x}+\frac{\ddot{y}}{\sqrt{2}}\right) = 2N - \frac{mg}{\sqrt{2}} \\ m\ddot{y} = mg - \sqrt{2}N \\ m\ddot{y} = -\frac{N}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{y} = -g \\ N = \sqrt{2}mg \\ \ddot{x} = 2\sqrt{2}g \end{cases}$$

→ De la ec 3 además tenemos

$$r\ddot{\theta} = -4\sqrt{2}g$$

→ Integrando en el tiempo:

$$\dot{x} = 2\sqrt{2}gt \qquad (\dot{x}|_0 = 0)$$

$$x = \sqrt{2}gt^2 + \frac{\sqrt{2}L}{6} \quad \left(x|_0 = \frac{\sqrt{2}L}{6}\right)$$

$$r\dot{\theta} = -4\sqrt{2}gt + \omega_0 r \quad (\dot{\theta}|_0 = \omega_0)$$

→ El tiempo en el que llega arriba está determinado por $x(t_f) = \sqrt{2}L$

$$\Rightarrow t_f = \sqrt{\frac{L}{g}}\sqrt{\frac{5}{6}}$$

→ Para que no deslice en ningun momento basta con que no esté deslizando en t_f

$$r\dot{\theta}\Big|_{t_f} > \dot{x}\Big|_{t_f} \Longleftrightarrow \boxed{r\omega_0 > \sqrt{gL}\sqrt{60}}$$

b) → Para que la placa no vuelque es necesario que $N_A > 0$ y $N_B > 0$ (7)

→ La segunda cardinal a la placa queda

$$-\frac{mL}{2}\ddot{y} = N_B L - mgL - xN$$

→ Usando los resultados de la parte anterior tenemos

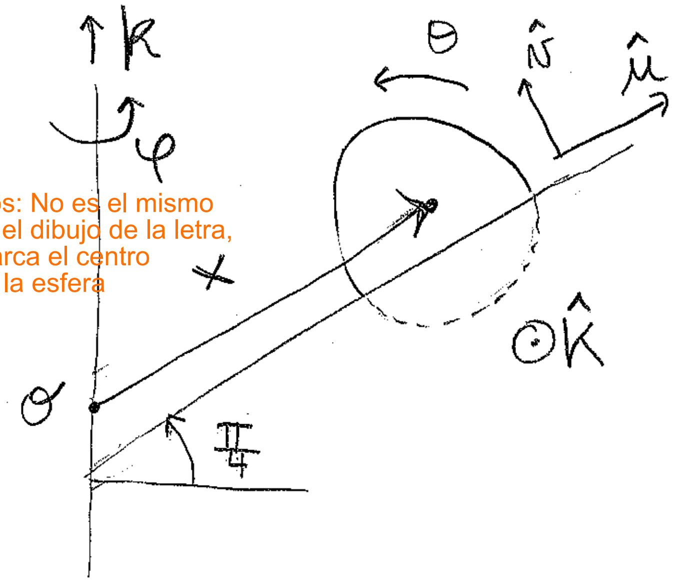
$$N_B = mg\left(\frac{3}{2} + \frac{x\sqrt{2}}{L}\right) > 0 \quad \forall x \in \left[\frac{\sqrt{2}L}{6}, \sqrt{2}L\right]$$

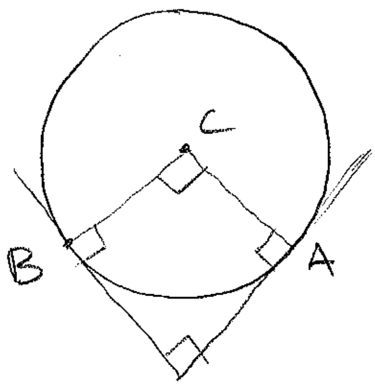
→ De la ecuación (5)

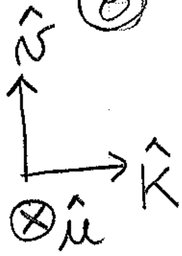
$$N_A = mg\left(\frac{5}{2} - \frac{x\sqrt{2}}{L}\right) > 0 \quad \forall x \in \left[\frac{\sqrt{2}L}{6}, \sqrt{2}L\right]$$

⟹ La placa no vuelca en ningún momento del recorrido

Problema 3 ($\varphi = \psi$ de la letra)







$\longrightarrow$ RSD en el sist de ref solidario a la guía

$\vec{N}'_C = \dot{x}\,\hat{u}$

$\vec{\omega}'_{esfera} = \dot{\theta}\,\hat{K}$

cond RSD $\vec{N}'_A = \vec{N}'_B = 0$

$\vec{N}'_A = \dot{x}\,\hat{u} + \vec{\omega}' \wedge \left(\frac{R}{\sqrt{2}}(-\hat{N}) + \frac{R}{\sqrt{2}}\hat{k}\right)$

$= \left(\dot{x} + \dot{\theta}\frac{R}{\sqrt{2}}\right)\hat{u}$

$\Longrightarrow$ La cond RSD es $\boxed{\dot{x} = -\frac{\dot{\theta} R}{\sqrt{2}}}$

Obs Imponer $\vec{N}'_B = 0$ da la misma cond

a) $\longrightarrow$ En el sistema fijo la velocidad angular de la esfera es $\boxed{\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\hat{k} + \dot{\theta}\,\hat{K}}$

b) Si consideramos todo el sist la esfera más la guía necesitamos 3 coords para describir su config: $\{x, \theta, \varphi\}$.

Usando el vínculo de RSD reducimos las coords a $\{x, \varphi\}$

$\Rightarrow$ Dos coords $\longrightarrow$ si hay dos cantidades cons, queda descrito el movimiento

$\longrightarrow$ Cantidades cons:

* E: sist conservativo
* $\vec{L}_O \cdot \hat{k}$: El momento externo al sistema guía+esfera es

$$\vec{M}_O^{ext} = \vec{M}_O^{art} + \vec{M}_O^{mg}$$

$$Y \begin{cases} \vec{M}_O^{mg} \cdot \hat{k} = 0 \\ \vec{M}_O^{art} \cdot \hat{k} = 0 \text{ (art cilíndrica lisa)} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ Calculamos $\vec{L}_O$:

* $\vec{L}_C = \mathbb{I}_C \vec{\omega} = I\dot{\varphi}\hat{k} + I\dot{\theta}K$

$$\mathbb{I}_C = I \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ en cualquier base}$$

con $I = \frac{mR^2 2}{5}$

* Trasladamos $\vec{L_c}$ a $\vec{L_O}$

$$\vec{r_G} = \vec{r_c} = x\hat{u}$$

$$\vec{v_G} = \dot{x}\hat{u} - \frac{x}{\sqrt{2}}\dot{\varphi}\hat{K}$$

$$\Rightarrow \vec{L_O} = \vec{L_G} + m\vec{v_G} \wedge (\underbrace{\vec{r_O} - \vec{r_G}}^{-x\hat{u}})$$

$$= I(\dot{\varphi}\hat{k} + \dot{\theta}\hat{K}) + m\left(\dot{x}\hat{u} - \frac{x}{\sqrt{2}}\dot{\varphi}\hat{K}\right) \wedge (-x\hat{u})$$

$$\vec{L_O} = I(\dot{\varphi}\hat{k} + \dot{\theta}K) + m\frac{x^2}{\sqrt{2}}\dot{\varphi}\hat{N}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{L_O} \cdot \hat{k} = I\dot{\varphi} + \frac{mx^2}{2}\dot{\varphi}}$$

$$\longrightarrow E = \frac{m}{2}\vec{v_G}^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\,\mathbb{I}_G\,\vec{\omega} + U^{mg}$$

$$\Rightarrow E = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \frac{x^2}{2}\dot{\varphi}^2\right) + \frac{I}{2}\left(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\right) + mg\frac{x}{\sqrt{2}}$$

Usando RSD:

$$\boxed{E = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \frac{x^2}{2}\dot{\varphi}^2\right) + \frac{I}{2}\left(\dot{\varphi}^2 + 2\frac{\dot{x}^2}{R^2}\right) + mgx}$$

$\longrightarrow$ Condiciones iniciales $\dot{\varphi}|_{t=0} = \dot{\varphi}_0$

$x|_{t=0} = x_0$

$\dot{x}|_{t=0} = 0$

→ Utilizando las conds iniciales y $E = cte$ $\vec{L_O} \cdot \hat{k} = cte$ tenemos

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{\varphi}\left(I + \frac{mx^2}{2}\right) = \underbrace{\dot{\varphi}_0\left(I + \frac{mx_0^2}{2}\right)}_{\ell} \\ &\frac{\dot{x}^2}{2}\left(m + \frac{I2}{R^2}\right) + \frac{\dot{\varphi}^2}{2}\left(I + \frac{mx^2}{2}\right) + mgx = \\ &\qquad = \underbrace{mgx_0 + \frac{\dot{\varphi}_0^2}{2}\left(I + \frac{mx_0^2}{2}\right)}_{E_0} \end{aligned}}$$

Estas son las dos ecs. que describen el mov

c) Sustituyendo $\dot{\varphi}$ tenemos $\left(\dot{\varphi} = \frac{\ell}{I + \frac{mx^2}{2}}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\dot{x}^2}{2}\left(m + \frac{2I}{R^2}\right) + \frac{\ell^2}{2\left(I + \frac{mx^2}{2}\right)} + mgx = E_0$$

→ La altura mínima se obtiene cuando $\dot{x} = 0$

$\Rightarrow$ x_{min} verifica

$$\boxed{\frac{\ell^2}{2\left(I + \frac{m x_{min}^2}{2}\right)} + mgx_{min} = E_0}$$