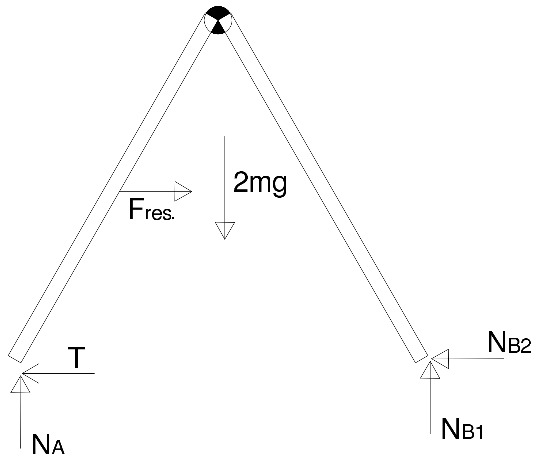
Solución segundo parcial 2007

Mecánica Newtoniana

Ejercicio 1



a) Planteando cardinales a las barras y teniendo en cuenta que el estiramiento del resorte es $x = 3L\sin\alpha$, se obtiene

$$\begin{aligned}
N_{B1} &= mg\left(\frac{3}{4}\cos\alpha + 1\right)\\
N_{B2} &= \frac{mg}{2}\left(\frac{3}{2}\sin\alpha + \tan\alpha\right)\\
N_A &= mg\left(1 - \frac{3}{4}\cos\alpha\right)\\
T &= \frac{mg}{2}\left(\frac{9}{2}\sin\alpha - \tan\alpha\right)
\end{aligned}$$

Para que el sistema se encuentre en equilibrio, se debe verificar $|T| < fN_A$, lo cual resulta en

$$\frac{3}{4}\cos\alpha - 1 \leq \frac{9}{4}\sin\alpha - \frac{1}{2}\tan\alpha \leq 1 - \frac{3}{4}\cos\alpha$$

Para $\alpha = 45^{\text{o}}$ no se verifica la segunda desigualdad.

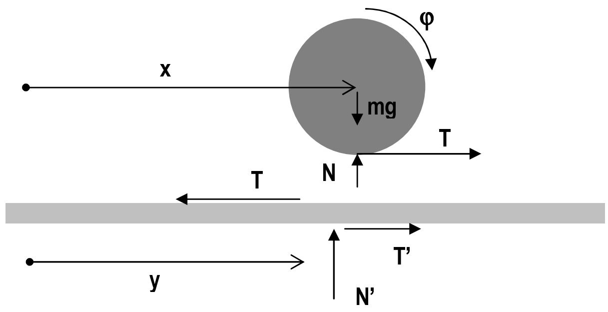
b) Agregando la reacción ejercida por la masa sobre la barra izquierda, las fuerzas dan como resultado

$$\begin{aligned}
T &= mg\left(\frac{9\sqrt{2}-4}{8}\right) - \frac{Mg}{4}\\
N_A &= mg\left(\frac{8-3\sqrt{2}}{8}\right) + \frac{3Mg}{4}
\end{aligned}$$

Nuevamente, planteando $|T| < fN_A$ resulta

$$M_{min} = \frac{3}{2}m(\sqrt{2}-1)$$

Ejercicio 2



a) Suponiendo por absurdo que la placa no desliza, con lo que $T' = T$, y sabiendo que $T = fN$ pues el disco sí desliza, debería verificarse $f < 2f' = f/2$. Por lo tanto, el régimen estático se rompe y la placa comienza a deslizar.

b) Las ecuaciones válidas mientras hay deslizamiento en los dos contactos son

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= fg \\ \ddot{\varphi} &= -\frac{2fg}{R} \\ \ddot{y} &= -\frac{fg}{2} \end{aligned}$$

c) El instante a determinar es aquel en que se cumple la condición de rodadura sin deslizamiento del disco sobre la placa,

$$\dot{y} = \dot{x} - R\dot{\varphi}$$

Preintegrando las ecuaciones obtenidas en la parte anterior, se despeja

$$t_1 = \frac{2R\omega_0}{7fg}$$

d) A partir de t_1 deja de verificarse $T = fN$ y se verifica $\dot{y} = \dot{x} - R\dot{\varphi}$. Operando con las cardinales, se tiene

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{fg}{8} \\ \ddot{\varphi} &= -\frac{fg}{4R} \\ \ddot{y} &= \frac{3fg}{8} \end{aligned}$$

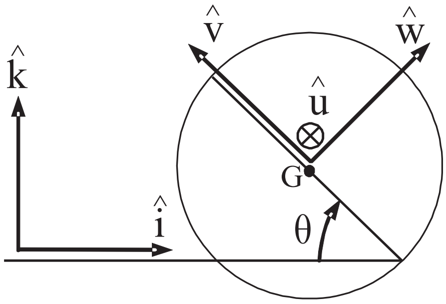
A partir de t_1 se verificará entonces

$$\dot{y}(t) = \dot{y}(t_1) + \frac{3fg}{8}(t - t_1) \qquad t > t_1$$

De la ecuación anterior se obtiene el tiempo que transcurre entre el instante inicial y el instante en que se detiene la placa,

$$t_f = \frac{2R\omega_0}{3fg}$$

Ejercicio 3



a) Sea $\Omega' \hat{w}$ la velocidad angular de la pelota relativa al plano vertical que pasa por G y el punto de contacto con el aro. La velocidad angular de ese plano es $\Omega \hat{k}$, por lo que la velocidad angular de la pelota se puede escribir como

$$\vec{\omega} = \Omega \hat{k} + \Omega' \hat{w}$$

La velocidad del centro de la pelota es $\vec{v}_G = (R - r\cos\theta)\Omega \hat{u}$, y como la pelota rueda sin deslizar se tiene

$$\vec{v}_G = \vec{\omega} \wedge r\hat{v} \Rightarrow \Omega' = -\frac{R}{r}\Omega \Rightarrow \vec{\omega} = \Omega\left(\hat{k} - \frac{R}{r}\hat{w}\right)$$

b) La aceleración del centro de masas es $\vec{a}_G = -(R - r\cos\theta)\Omega^2 \hat{i}$ ($\hat{i}$ contenido en el plano vertical que gira con velocidad angular $\Omega \hat{k}$). Las reacciones del aro sobre la pelota son $N\hat{v}$ y $T\hat{w}$, por lo que las proyecciones horizontal y vertical de la primera cardinal resultan

$$\begin{aligned} T\sin\theta - N\cos\theta &= -m(R - r\cos\theta)\Omega^2 \\ N\sin\theta + T\cos\theta - mg &= 0 \end{aligned}$$

La segunda cardinal se escribe como $\dfrac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{ext}$. El momento de inercia de la pelota alrededor de un eje que pasa por su centro es $I = \frac{2}{3}mr^2$, por lo que $\dfrac{d\vec{L}_G}{dt} = \frac{2}{3}mr^2 \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$. Para derivar $\vec{\omega}$, se considera la derivación en el sistema relativo $\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}\}$, que tiene velocidad angular $\Omega \hat{k}$.

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \Omega \hat{k} \wedge \vec{\omega} = -\Omega^2 \frac{R}{r} \hat{k} \wedge \hat{w} = -\Omega^2 \frac{R}{r} \sin\theta \hat{u}$$

Por otro lado, $\vec{M}_G^{ext} = -rT\hat{u}$, por lo que la segunda cardinal se escribe como

$$\frac{2}{3} mR\Omega^2 \sin\theta = T$$

c) Eliminando T y N entre las ecuaciones cardinales, resulta

$$\Omega^2 = \frac{g\cot\theta}{\frac{5}{3}R - r\cos\theta}$$