Mecánica Newtoniana – Instituto de Física

Examen de 17 de febrero de 2022 – *Solución*

Problema 1

(*a*) Como el potencial solo depende de la distancia r, la partícula se mueve bajo la acción de una fuerza central que deriva de $U(r)$. Esto implica que *se conserva la energía mecánica* E, porque la fuerza es conservativa y que *se conserva el momento angular* $\vec{L}_O$ respecto al origen, porque la fuerza es central y el momento de fuerzas respecto al origen es nulo.
La partícula se mueve en el plano definido por la posición y velocidad iniciales. Usamos coordenadas polares cilíndricas (r, θ, z) para describir el movimiento y su base correspondiente $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{k}\}$.

$$\begin{aligned} &\text{posición} &&: \vec{r}(t) = r\hat{e}_r, && \vec{r}(0) = r_0\hat{e}_r \\ &\text{velocidad} &&: \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta, && \dot{\vec{r}}(0) = r_0\dot{\theta}(0)\hat{e}_\theta \\ &\text{módulo cuadrado} &&: \|\vec{v}\|^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2, && \|\vec{v}(0)\|^2 = r_0^2\dot{\theta}(0)^2 \end{aligned}$$

Consideramos la conservación del momento angular:

$$\vec{L}_O = m\vec{r}\times\vec{v} = \text{const.}$$

Calculamos $\vec{L}_O$ y evaluamos en $t = 0$.

$$\vec{L}_O = mr\hat{e}_r \times (\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\hat{k} = mr_0v_0\hat{k}$$

$$\rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{mr_0v_0}{mr^2} = \frac{l}{mr^2}}$$

donde

$$l \overset{\text{def}}{=} \left\|\vec{L}_O\right\| = mr_0v_0$$

Planteamos la conservación de la energía mecánica E, expresada en términos de r.

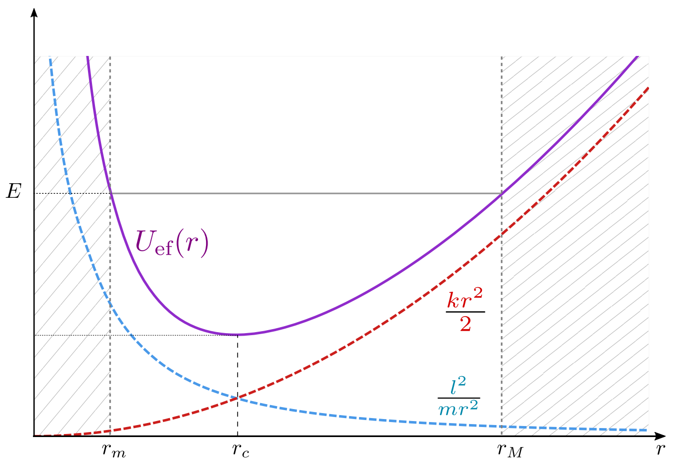
$$E = \frac{m\|\vec{v}\|^2}{2} + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2} + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{kr^2}{2} = \text{const.}$$

Evaluando en $t = 0$ obtenemos

$$\boxed{E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{\text{ef}}(r) = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{kr_0^2}{2}}$$

El resultado equivale al de una partícula en una dimensión en un potencial efectivo dado por

$$\boxed{U_{\text{ef}}(r) \overset{\text{def}}{=} \frac{l^2}{2mr^2} + U(r)}$$



(se encuentra el mismo resultado planteando la primera cardinal para la partícula y preintegrando la ecuación de movimiento). Siendo $k > 0$ (según enunciado) podemos afirmar que el potencial efectivo diverge a medida que aumenta r.

El término de energía cinética radial

$$T \overset{\text{def}}{=} \frac{m\dot{r}^2}{2}$$

es *definido positivo*, lo que lleva a que las trayectorias de la partícula deben ser acotadas.

$$T = E - U_{\text{ef}}(r) \geq 0 \Longleftrightarrow E \geq U_{\text{ef}}(r)$$

Como $E = \text{const.}$ y $U_{\text{ef}}(r) \xrightarrow{r\to+\infty} +\infty$, la desigualdad anterior solo se mantiene si existe un radio máximo r_M tal que

$$r \leq r_M$$

para todo el movimiento. Por lo tanto, la trayectoria de la partícula siempre es acotada.

Observamos que además existe un radio mínimo r_m, ya que $U_{\text{ef}}(r) \to +\infty$ si $r \to 0^+$. Los radios r_m y r_M se pueden determinar resolviendo $T(r) = 0$ (solo nos interesan soluciones con $r > 0$). Definimos por conveniencia la variable $\Omega \overset{\text{def}}{=} \sqrt{k/m}$.

$$T = 0 \longleftrightarrow E - \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{kr^2}{2} = 0$$

$$\longleftrightarrow \frac{k}{2}[r^2]^2 - E[r^2] + \frac{l^2}{2m} = 0$$

Obtenemos una ecuación cuadrática para r^2.

Resolviendo:

$$\boxed{r_\pm = \sqrt{\frac{E \pm \sqrt{E^2 - (\Omega l)^2}}{k}}}$$

Sustituyendo los valores de E y l se obtienen las soluciones

$$\boxed{\begin{cases} r_- = r_0 \\ r_+ = \dfrac{v_0}{\Omega} \end{cases}}$$

r_m y r_M corresponden al mínimo y al máximo de $\{r_-, r_+\}$, respectivamente.

La órbita es circular solo cuando $r(t) = \text{const.} \overset{\text{def}}{=} r_c$. En ese caso debemos tener $r_+ = r_- = r_c$ y obtenemos las condiciones equivalentes

$$\boxed{v_0 = \Omega r_0 \overset{\text{def}}{=} v_c} \qquad \boxed{E = \Omega l}$$

(se llega al mismo resultado al imponer $T = 0$ para todo tiempo; también al analizar la ecuación de movimiento de la partícula con $r(t) = \text{const.}$).

(*b*)

En esta parte tenemos $v_0 = 2v_c = 2\Omega r_0$.

$$E = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{kr_0^2}{2} = \frac{5kr_0^2}{2} \qquad l = 2mr_0^2\Omega$$

Despejamos $\dot{r}(t)$ a partir de la ecuación de conservación de la energía. Usamos un cambio de variables para obtener la integral que determina el tiempo Δt:

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2[E - U_{\text{ef}}(r)]}{m}}$$

$$dt = \frac{\mathrm{d}r}{\dot{r}} \to \Delta t = \int_{t(r_-)}^{t(r_+)} \mathrm{d}t = \int_{r_-}^{r_+} \frac{\mathrm{d}r}{\dot{r}}$$

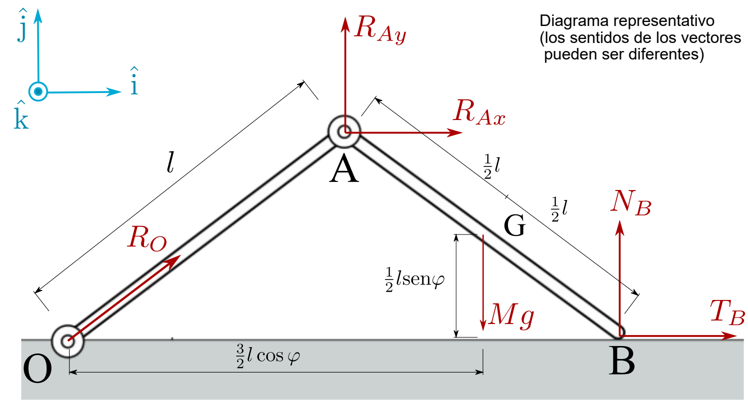
$$\Delta t = \int_{r_-}^{r_+} \sqrt{\frac{m}{2[E - U_{\text{ef}}(r)]}}\mathrm{d}r$$

Sustituyendo las expresiones para este caso:

$$\boxed{\Delta t = \frac{1}{\Omega} \int_{r_0}^{2r_0} \left[5r_0^2 + r^2 - \frac{4r_0^4}{r^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}r}$$

Problema 2

(a) Consideramos un sistema de referencia fijo con origen en el punto O y base $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$. Planteamos las fuerzas sobre cada cuerpo y las cardinales correspondientes. Como las articulaciones son lisas, no aparecen momentos reactivos.



<u>Fuerzas sobre AB</u>:
$\vec{R}_A = R_{Ax}\hat{\imath} + R_{Ay}\hat{\jmath}$, aplicada en A
$\vec{R}_B = T_B\hat{\imath} + N_B\hat{\jmath}$, aplicada en B
$\vec{P} = -Mg\hat{\jmath}$, aplicada en G

<u>Fuerzas sobre OA</u>:
$\vec{R}_O = R_{Ox}\hat{\imath} + R_{Oy}$, aplicada en O
$-\vec{R}_A = -R_{Ax}\hat{\imath} - R_{Ay}\hat{\jmath}$, aplicada en A

(T_B representa la fuerza de fricción estática en B). Consideramos las ecuaciones cardinales con el sistema en reposo. El ángulo de inclinación vale $\varphi(0) = 45°$ con lo cual $\cos\varphi = \mathrm{sen}\,\varphi = 1/\sqrt{2}$.

Primera cardinal OA:

$$\vec{R}_O - \vec{R}_A = 0 \Rightarrow \vec{R}_O = \vec{R}_A$$

Segunda cardinal OA:

- respecto a O
- $\vec{r}_{OA} = (\hat{\imath} + \hat{\jmath})l/\sqrt{2}$

$$\vec{r}_{OA} \times \vec{R}_A = 0$$

$$\frac{l}{\sqrt{2}}(\hat{\imath} + \hat{\jmath}) \times (R_{Ax}\hat{\imath} + R_{Ay}\hat{\jmath}) = \frac{l}{\sqrt{2}}(R_{Ay} - R_{Ax})\hat{k} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{R_{Ax} = R_{Ay}}$$

Primera cardinal AB:

$$\boxed{R_{Ax} + T_B = 0}$$

$$\boxed{R_{Ay} + N_B - Mg = 0}$$

Segunda cardinal AB:

- respecto a G
- $\vec{r}_{GA} = (-\hat{\imath} + \hat{\jmath})l/2\sqrt{2}$
- $\vec{r}_{GB} = (\hat{\imath} - \hat{\jmath})l/2\sqrt{2}$

$$\vec{r}_{GA} \times \vec{R}_A + \vec{r}_{GB} \times (\vec{T}_B\hat{\imath} + N_B\hat{\jmath}) = 0$$

$$\frac{l}{2\sqrt{2}}(-R_{Ay} - R_{Ax} + N_B + T_B)\hat{k} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{-R_{Ay} - R_{Ax} + N_B + T_B = 0}$$

Combinamos las ecuaciones y resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} R_{Ax} = R_{Ay} \\ R_{Ax} + T_B = 0 \\ R_{Ay} + N_B - Mg = 0 \\ -R_{Ay} - R_{Ax} + N_B + T_B = 0 \end{cases}$$

La solución del sistema nos lleva a

$$N_B = \frac{3Mg}{4} \qquad T_B = -\frac{Mg}{4}$$

Observamos que no puede ocurrir un desprendimiento ya que $N_B > 0$. Para que el punto B no deslice se debe cumplir la condición

$$|T_B| \leq \mu_s |N_B| \longleftrightarrow \boxed{\mu_s \geq \frac{1}{3}}$$

(b) La velocidad angular de la barra AB está dada, en general, por $\vec{\omega} = -\dot{\varphi}\hat{\text{k}}$ (cuando $\dot{\varphi} < 0$, B se mueve hacia la derecha y la barra gira en sentido *antihorario*).
Evaluamos las cardinales en $t = 0$, considerando $\varphi(0) = 45°$ y $\dot{\varphi}(0) = 0$.

Movimiento del centro de masa G:

$$\vec{r}_G = \frac{l}{2}(3\cos\varphi\hat{\imath} + \operatorname{sen}\varphi\hat{\jmath}) \underset{t=0}{=} \frac{l}{2\sqrt{2}}(3\hat{\imath} + \hat{\jmath})$$

$$\vec{v}_G = \frac{l}{2}\dot{\varphi}(-3\operatorname{sen}\varphi\hat{\imath} + \cos\varphi\hat{\jmath}) \underset{t=0}{=} 0$$

$$\vec{a}_G = \frac{l\ddot{\varphi}}{2}(-3\operatorname{sen}\varphi\hat{\imath} + \cos\varphi\hat{\jmath}) - \frac{l\dot{\varphi}^2}{2}(3\cos\varphi\hat{\imath} + \operatorname{sen}\varphi\hat{\jmath})$$

$$\underset{t=0}{=} \frac{l\ddot{\varphi}}{2\sqrt{2}}(-3\hat{\imath} + \hat{\jmath})$$

Las fuerzas y momentos sobre el sistema son análogos a la parte anterior (como hay deslizamiento, ahora T_B representa la *fuerza de rozamiento dinámica*). La barra OA no tiene masa ni momento de inercia. Por lo tanto sus ecuaciones cardinales son idénticas a las de antes y obtenemos

$$\boxed{R_{Ax} = R_{Ay}}\,.$$

El momento de inercia de AB con respecto a G vale $I_G = Ml^2/12$.

Primera cardinal AB:

$$R_{Ax} + T_B = -\frac{3Ml\ddot{\varphi}}{2\sqrt{2}}$$

$$R_{Ay} + N_B - Mg = \frac{Ml\ddot{\varphi}}{2\sqrt{2}}$$

Segunda cardinal AB: (con respecto a G)

$$\vec{r}_{GA} \times \vec{R}_A + \vec{r}_{GB} \times (\vec{T}_B\hat{\imath} + N_B\hat{\jmath}) = I_G\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times I_G\vec{\omega}$$

Evaluando en $t = 0$, con $\vec{\omega}(0) = 0$ y $\dot{\vec{\omega}}(0) = -\ddot{\varphi}\hat{\text{k}}$, tenemos

$$\frac{l}{2\sqrt{2}}(-R_{Ay} - R_{Ax} + N_B + T_B)\hat{\text{k}} = -\frac{Ml^2\ddot{\varphi}}{12}\hat{\text{k}}$$

Agrupamos los resultados en un sistema de ecuaciones. Considerando que B comienza a moverse hacia la derecha, agregamos la relación de la fuerza de rozamiento dinámica $T_B = -\mu_k N_B$.

$$\begin{cases} -R_{Ay} - R_{Ax} + N_B + T_B = -\dfrac{Ml\ddot{\varphi}}{3\sqrt{2}} & (i) \\ R_{Ax} + T_B = -\dfrac{3Ml\ddot{\varphi}}{2\sqrt{2}} & (ii) \\ R_{Ay} + N_B - Mg = \dfrac{Ml\ddot{\varphi}}{2\sqrt{2}} & (iii) \\ T_B = -\mu_k N_B & \\ R_{Ax} = R_{Ay} & \end{cases}$$

Combinamos $\{(i) + (ii) + (iii)\}$ y $\{(iii) - (ii)\}$ (por ejemplo):

$$\begin{cases} (1 - \mu_k)N_B - \dfrac{Mg}{2} = -\dfrac{2Ml\ddot{\varphi}}{3\sqrt{2}} & (iv) \\ (1 + \mu_k)N_B - Mg = \dfrac{2Ml\ddot{\varphi}}{\sqrt{2}} & (v) \end{cases}$$

y a continuación $\{(1 + \mu_k)(iv) - (1 - \mu_k)(v)\}$:

$$\left[-(1 + \mu_k)\frac{1}{2} + 1 - \mu_k\right]Mg = -\frac{4Ml\ddot{\varphi}}{3\sqrt{2}}(2 - \mu_k)$$

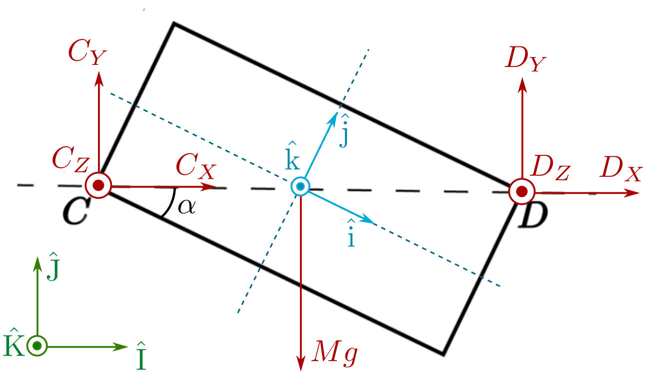
$$\boxed{\ddot{\varphi} = -\frac{3}{4\sqrt{2}}\frac{(1 - 3\mu_k)}{(2 - \mu_k)}\frac{g}{l}} \quad \text{(t=0)}$$

Como hay deslizamiento, sabemos que $\mu_s < 1/3$ por la parte anterior. Entonces, usando que $\mu_k \leq \mu_s$, observamos que $\ddot{\varphi}(0) < 0$. Este resultado es compatible con nuestra suposición de B moviéndose hacia la derecha. También se obtiene $N_B > 0$: no hay desprendimiento en el instante inicial. Se puede mostrar que si suponemos que B se mueve hacia la izquierda llegamos a una contradicción, porque resultaría $N_B < 0$, que representa una normal opuesta al sentido correcto.

Problema 3

(*a*) Consideramos un sistema de referencia fijo $S_0 = \{\hat{\text{I}}, \hat{\text{J}}, \hat{\text{K}}\}$ con $\hat{\text{I}}$ alineado según el eje de rotación, $\hat{\text{K}}$ horizontal y $\hat{\text{J}}$ vertical hacia arriba. Consideramos también un sistema de ejes principales $S_1 = \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ solidario a la placa, tal que $\hat{\imath}$ es paralelo al lado mayor, $\hat{\jmath}$ es paralelo al lado menor y $\hat{k}$ es normal a la placa.

$$\overline{CD} = \sqrt{a^2 + (3a)^2} = \sqrt{10}a$$



Calculamos el tensor de inercia de la placa con respecto a su centro O usando el sistema S_1.

S_1 es un sistema de ejes principales (por la simetría del cuerpo):

$$\mathbb{I}_O^{[S_1]} = \begin{bmatrix} I_{xx} & & \\ & I_{yy} & \\ & & I_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbb{I}_O^{[S_1]} = \frac{Ma^2}{12} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 9 & \\ & & 10 \end{bmatrix}}$$

La densidad superficial de masa es $M/3a^2$. Los momentos de inercia se calculan mediante

$$I_{xx} = \frac{M}{3a^2} \int_{-3a/2}^{3a/2} \mathrm{d}x \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}y\, y^2 = \frac{Ma^2}{12}$$

$$I_{yy} = \frac{M}{3a^2} \int_{-3a/2}^{3a/2} \mathrm{d}x \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}y\, x^2 = \frac{9Ma^2}{12}$$

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} = \frac{10Ma^2}{12} \quad \text{(cuerpo plano)}$$

La velocidad angular de la placa tiene el sentido del eje de rotación fijo: $\vec{\omega} = \omega\hat{\text{I}}$.

El vector $\hat{\text{I}}$ queda incluido en el plano de la placa y forma un ángulo α con $\hat{\imath}$, que es el ángulo entre el lado largo de la placa y su diagonal. Entonces

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

con lo cual $\hat{\text{I}} = \cos\alpha\hat{\imath} + \operatorname{sen}\alpha\hat{\jmath}$ y por lo tanto $\vec{\omega} = \omega(\cos\alpha\hat{\imath} + \operatorname{sen}\alpha\hat{\jmath})$.

El momento angular con respecto a O es

$$\boxed{\vec{L}_O = \mathbb{I}_O^{[S_1]}\vec{\omega} = \frac{Ma^2\omega}{4\sqrt{10}}(\hat{\imath} + 3\hat{\jmath})}$$

(*b*) Consideremos las fuerzas que actúan sobre la placa.

Fuerzas sobre la placa:

$\vec{C} = C_X\hat{\text{I}} + C_Y\hat{\text{J}} + C_Z\hat{\text{K}}$: fuerza reactiva en C
$\vec{D} = D_X\hat{\text{I}} + D_Y\hat{\text{J}} + D_Z\hat{\text{K}}$: fuerza reactiva en D
$\vec{P} = -Mg\hat{\text{J}}$: peso en O

Utilizamos las ecuaciones cardinales en el sistema fijo S_0 para determinar las fuerzas.

Primera cardinal

$$\vec{C} + \vec{D} + \vec{P} = M\vec{a}_O = 0$$

$$\begin{cases} C_X + D_X = 0 \\ C_Y + D_Y - Mg = 0 \\ C_Z + D_Z = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} C_Y = Mg - D_Y \\ D_Z = -C_Z \end{cases}}$$

$\vec{\omega}$ **es constante**: Como las articulaciones son lisas, su momento reactivo no tiene componente paralela al eje: $\vec{\mathcal{M}}_O^{(\text{react.})} \cdot \hat{\text{I}} = 0$. Esto garantiza que la velocidad angular se mantenga constante, puesto que además, respecto a O, ninguna de las fuerzas sobre la placa ejerce un momento con componente en esa dirección:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} \cdot \hat{\text{I}} = \vec{\mathcal{M}}_O^{(\text{ext.})} \cdot \hat{\text{I}} = 0 \Longrightarrow \vec{L}_O \cdot \hat{\text{I}} = \text{const.}$$

$$(\mathbb{I}_O\vec{\omega}) \cdot \hat{\text{I}} = \omega\frac{Ma^2}{4}\frac{(\hat{\imath} + 3\hat{\jmath})}{\sqrt{10}} \cdot \frac{(3\hat{\imath} + \hat{\jmath})}{\sqrt{10}} = \frac{3Ma^2}{20}\omega$$

$$\Longrightarrow \boxed{\omega = \text{const.}}$$

Segunda Cardinal
con respecto a O (centro de masa fijo):

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}}_O^{(\text{ext.})}$$

Podemos usar las relaciones

- $\vec{r}_{OD} = \frac{\sqrt{10}}{2}a\hat{\text{I}} = -\vec{r}_{OC}$
- $\hat{\text{k}} = \cos\omega t\hat{\text{J}} + \operatorname{sen}\omega t\hat{\text{K}}$

(en el instante inicial la placa está horizontal y $\hat{\text{k}}$ coincide con $\hat{\text{J}}$).

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \mathbb{I}_O\vec{\omega} = \frac{Ma^2\omega^2}{40}(3\hat{\imath} + \hat{\jmath}) \times (\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}) = \frac{Ma^2\omega^2}{5}\hat{\text{k}}$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_O^{(\text{ext.})} &= \vec{r}_{OC} \times \vec{C} + \vec{r}_{OD} \times \vec{D} \\ &= \frac{\sqrt{10}a}{2}\left[-\hat{\text{I}} \times (C_Y\hat{\text{J}} + C_Z\hat{\text{K}}) + \hat{\text{I}} \times (D_Y\hat{\text{J}} + D_Z\hat{\text{K}})\right] \\ &= \frac{\sqrt{10}a}{2}\left[(C_Z - D_Z)\hat{\text{J}} + (D_Y - C_Y)\hat{\text{K}}\right] \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{cases} C_Z - D_Z = \dfrac{2Ma\omega^2}{5\sqrt{10}}\cos\omega t \\ D_Y - C_Y = \dfrac{2Ma\omega^2}{5\sqrt{10}}\cos\omega t \end{cases}$$

Sustituimos las expresiones halladas anteriormente para las componentes de las reacciones y llegamos a:

$$\begin{cases} C_Z = \dfrac{Ma\omega^2}{5\sqrt{10}}\cos\omega t \\ C_Y = -\dfrac{Ma\omega^2}{5\sqrt{10}}\operatorname{sen}\omega t + \dfrac{Mg}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} D_Z = -\dfrac{Ma\omega^2}{5\sqrt{10}}\cos\omega t \\ D_Y = \dfrac{Ma\omega^2}{5\sqrt{10}}\operatorname{sen}\omega t + \dfrac{Mg}{2} \end{cases}$$

Observamos que las cardinales no determinan las componentes C_X y D_X de las reacciones a lo largo del eje. De todos modos, por las características del sistema es esperable que ambas sean nulas.