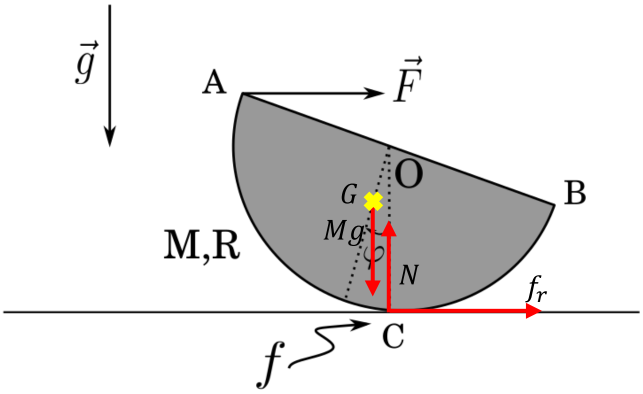
Solución - Problema 2

Parte a)



Sea G el centro de masa:

$$\overrightarrow{a_G} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath}$$

Aplicamos la Primera Cardinal:

$$F + f_r = ma_x$$

$$N - mg = ma_y$$

Tenemos que vincular la aceleración angular del disco ($\ddot{\varphi}$) con la aceleración del centro de masa ($\overrightarrow{a_G}$).

Distribución de velocidades entre los puntos C y O, teniendo en cuenta que por RSD $\overrightarrow{v_C} = 0$:

$$\overrightarrow{v_C} = \overrightarrow{v_O} + \vec{\omega} \times (\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_O})$$

$$\vec{\omega} = -\dot{\varphi}\hat{k}$$

$$\overrightarrow{v_O} = \dot{\varphi}R\,\hat{\imath}$$

Distribución de velocidades entre los puntos O y G para hallar $\overrightarrow{v_G}$:

$$\overrightarrow{v_G} = \overrightarrow{v_O} + \vec{\omega} \times (\overrightarrow{r_G} - \overrightarrow{r_O})$$

$$\overrightarrow{v_G} = \overrightarrow{v_O} - \dot{\varphi}\hat{k} \times d\,\widehat{e_r}$$

$$\overrightarrow{v_G} = \dot{\varphi}R\,\hat{\imath} + \dot{\varphi}d\,\widehat{e_\varphi}$$

En la ecuación anterior introducimos el valor d que representa la distancia entre el punto O y el centro de masa G, calculado más adelante.

Derivo $\overrightarrow{v_G}$ para hallar $\overrightarrow{a_G}$

$$\overrightarrow{a_G} = \left[\ddot{\varphi}(R - d\cos\varphi) + \dot{\varphi}^2 d\sin\varphi\right]\hat{\imath} + [\ddot{\varphi}d\sin\varphi + \dot{\varphi}^2 d\cos\varphi]\,\hat{\jmath}$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$F + f_r = m\left[\ddot{\varphi}(R - d\cos\varphi) + \dot{\varphi}^2 d\sin\varphi\right]$$

$$N - mg = m[\ddot{\varphi}d\sin\varphi + \dot{\varphi}^2 d\cos\varphi]$$

De las ecuaciones anteriores podemos despejar f_r y N

$$f_r = m\left[\ddot{\varphi}(R - d\cos\varphi) + \dot{\varphi}^2 d\sin\varphi\right] - F$$

$$N = m[\ddot{\varphi}d\sin\varphi + \dot{\varphi}^2 d\cos\varphi + g]$$

Aplicamos la Segunda Cardinal en G:

$$\overrightarrow{L_G} = I_G \vec{\omega} = -I_G \dot{\varphi}\, \hat{k}$$

$$\frac{d\overrightarrow{L_G}}{dt} = -I_G \ddot{\varphi}\, \hat{k}$$

Por otro lado, calculamos los momentos respecto a G que generan las fuerzas F, N, f_r y Mg

$$\overrightarrow{M_G} = [-F(R\sin\varphi + d\cos\varphi) + Nd\sin\varphi + f_r(R - d\cos\varphi)]\, \hat{k}$$

Obtenemos entonces la Segunda Cardinal aplicada en G

$$-I_G\ddot{\varphi} = -F(R\sin\varphi + d\cos\varphi) + Nd\sin\varphi + f_r(R - d\cos\varphi)$$

Sustituyendo obtenemos:

$$\begin{aligned}-I_G\ddot{\varphi} = -F(R\sin\varphi + d\cos\varphi) + m[\ddot{\varphi}d\sin\varphi + \dot{\varphi}^2 d\cos\varphi + g]d\sin\varphi \\ + \left(m\left[\ddot{\varphi}(R - d\cos\varphi) + \dot{\varphi}^2 d\sin\varphi\right] - F\right)(R - d\cos\varphi)\end{aligned}$$

¿Cómo podemos calcular I_G?

Observar que el momento de inercia respecto al centro de un semiaro/semidisco y respecto a un eje perpendicular al plano que contiene al rígido es la mitad del momento de inercia respecto al centro de masa de un aro/disco.

Por lo que:

$$I_O{}^{semiaro} = \frac{I_O{}^{aro}}{2} = \frac{2mR^2}{2} = mR^2$$

$$I_O{}^{semidisco} = \frac{I_O{}^{disco}}{2} = \frac{2mR^2}{2}\frac{1}{2} = \frac{mR^2}{2}$$

Para llevar el momento de inercia al centro de masa G aplicamos Steiner:

$$I_O = I_G + md^2$$

$$I_G = I_O - md^2$$

Finalmente, la ecuación de movimiento resulta:

$$\ddot{\varphi}(I_O + mR^2 - 2mdR\cos\varphi) + \dot{\varphi}^2(mRd\sin\varphi) = FR(1 + \sin\varphi) - mgd\sin\varphi$$

La condición que permite que el rígido ruede sin deslizar en un entorno del instante inicial es:

$$|f_r| \leq f|N|$$

Condiciones iniciales:

$$\varphi(0) = 0$$

$$\dot{\varphi}(0) = 0$$

Por lo que:

$$\ddot{\varphi}(0) = \frac{FR}{I_O + mR^2 - 2mdR}$$

Y por ende:

$$f_r(0) = m\left[\frac{FR}{I_O + mR^2 - 2mdR}(R-d)\right] - F$$

$$f_r(0) = F\left[\frac{mR(R-d) - I_O - mR^2 + 2mdR}{I_O + mR^2 - 2mdR}\right]$$

$$f_r(0) = F\left[\frac{-I_O + mdR}{I_O + mR^2 - 2mdR}\right]$$

$$N(0) = mg$$

$$\left|F\left[\frac{-I_O + mdR}{I_O + mR^2 - 2mdR}\right]\right| \leq fmg$$

¿Cómo calculamos la distancia d entre el centro O y el centro de masa G?

Tomemos un semiaro/semidisco cuyo diámetro se alinea con el eje horizontal y el centro coincide con el eje de coordenadas.

Utilizando argumentos de simetría resulta sencillo ver que $x_G = 0$

Por definición de CM:

$$y_{CM} = \frac{1}{m}\iint y\ dm$$

Caso semiaro:

$$y_{CM} = \frac{1}{m}\int_0^{\pi} R\sin\theta\,\frac{m}{\pi R}R d\theta$$

$$y_{CM} = \frac{R}{\pi}\big(-\cos\pi - (-\cos 0)\big) = \frac{2R}{\pi}$$

Caso semidisco:

$$y_{CM} = \frac{1}{m}\iint_{0,0}^{\pi,R} r\sin\theta\ \frac{2m}{\pi R^2}\ r d\theta dr$$

$$y_{CM} = \frac{2}{\pi R^2}\frac{R^3}{3}\big(-\cos\pi - (-\cos 0)\big) = \frac{4R}{3\pi}$$

Parte b)

Como ahora desliza, tenemos que analizar el sentido del rozamiento. Al aplicar la fuerza F nuestro rígido intentará desplazarse hacia la derecha por lo que el rozamiento es en efecto hacia la izquierda (contrario a lo representado en el diagrama de cuerpo libre inicial).

$$f_r = fN$$

Los momentos resultan:

$$\overrightarrow{M_G} = [-F(R\sin\varphi + d\cos\varphi) - Nd\sin\varphi - fN(R - d\cos\varphi)]\,\hat{k}$$

En un entorno del instante inicial se verifica:

$$N = mg$$

$$\overrightarrow{M_G} = [-Fd - fmg(R - d)]\,\hat{k} = -I_G\ddot{\varphi}\,\hat{k}$$

Finalmente:

$$\ddot{\varphi} = \frac{Fd + fmg(R - d)}{I_O - md^2}$$