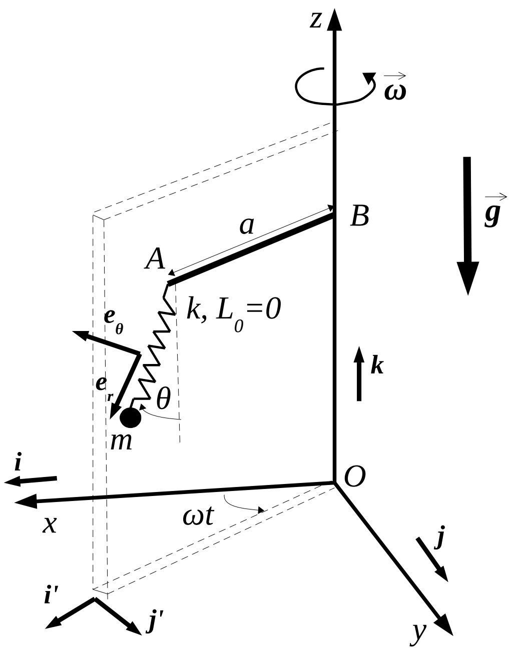


Solución del Ejercicio 1

a) Sean $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ los versores correspondientes al sistema de coordenadas *x,y,z* de la figura. Defino $\hat{i}'=\cos(\omega t)\hat{i}+\sin(\omega t)\hat{j}$ y $\hat{j}'=-\sin(\omega t)\hat{i}+\cos(\omega t)\hat{j}$, versores móviles de manera que $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}$ es una base solidaria al plano vertical que gira con velocidad angular $\vec{\omega}$. Dentro de ese plano defino $\hat{e}_r=-\cos\theta\,\hat{k}+\sin\theta\,\hat{i}'$ y $\hat{e}_\theta=\sin\theta\,\hat{k}+\cos\theta\,\hat{i}'$, versores solidarios al movimiento de la partícula, siendo θ el ángulo que forma la recta que une la partícula con *A* con respecto a la vertical. Considero el sistema de coordenadas solidario al plano vertical que gira con velocidad angular $\vec{\omega}$ centrado en *A*. Entonces tenemos que la posición relativa de la partícula será $\vec{r}\,'=r\,\hat{e}_r$, donde *r* es la distancia desde *A* a la partícula. Calculando la velocidad relativa de la partícula en este sistema queda como $\vec{v}\,'=\dot{r}\,\hat{e}_r+r\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$ y su aceleración relativa queda como $\vec{a}\,'=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\hat{e}_\theta$.

b) Primero calculo la velocidad y la aceleración del centro de coordenadas del sistema móvil, *A*. Así tenemos $\vec{v}_A=a\,\omega\,\hat{j}'$ y $\vec{a}_A=-a\,\omega^2\,\hat{i}'=-a\,\omega^2\sin\theta\,\hat{e}_r-a\,\omega^2\cos\theta\,\hat{e}_\theta$.

Utilizando los teoremas de Roverbal y Coriolis, calculamos la velocidad y aceleración absolutas de la partícula:

$$\vec{v}=\vec{v}_A+\vec{v}\,'+\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'=a\,\omega\,\vec{j}\,'+\dot{r}\,\hat{e}_r+r\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta+\omega\,\hat{k}\wedge r\,\hat{e}_r=a\,\omega\,\vec{j}\,'+\dot{r}\,\hat{e}_r+r\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta+\omega(-\cos\theta\,\hat{e}_r+\sin\theta\,\hat{e}_\theta)\wedge r\,\hat{e}_r$$

$$\vec{v}=(a+r\sin\theta)\omega\,\vec{j}\,'+\dot{r}\,\hat{e}_r+r\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$$

$$\vec{a}=\vec{a}_A+\vec{a}\,'+\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'+2\vec{\omega}\wedge\vec{v}\,'$$

$$\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-a\,\omega^2\sin\theta)\hat{e}_r+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-a\,\omega^2\cos\theta)\hat{e}_\theta+\omega\,\hat{k}\wedge r\sin\theta\,\omega\,\hat{j}\,'+2\omega\,\hat{k}\wedge(\dot{r}\,\hat{e}_r+r\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta)$$

$$\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-a\,\omega^2\sin\theta)\hat{e}_r+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-a\,\omega^2\cos\theta)\hat{e}_\theta-\omega^2 r\sin\theta\,\hat{i}\,'+2\,\omega(-\cos\theta\,\hat{e}_r+\sin\theta\,\hat{e}_\theta)\wedge(\dot{r}\,\hat{e}_r+r\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta)$$

$$\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-(a+r\sin\theta)\omega^2\sin\theta)\hat{e}_r+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-a\,\omega^2\cos\theta-\omega^2 r\sin\theta\cos\theta)\hat{e}_\theta+2\,\omega\,(\dot{r}\sin\theta+r\,\dot{\theta}\cos\theta)\,\hat{j}\,'$$

c) La fuerza neta que actúa sobre la partícula está dada por:
$\vec{F}_{tot}=-k\,\vec{r}\,'-m\,\vec{g}+N\,\hat{j}\,'=-k\,r\,\hat{e}_r-m\,g\,\hat{k}+N\,\hat{j}\,'=(-k\,r)\hat{e}_r-m\,g(-\cos\theta\,\hat{e}_r+\sin\theta\,\hat{e}_\theta)+N\,j\,'$.

Sustituyendo las componentes de la ecuación de Newton obtenemos:

$$\hat{e}_r)\quad m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-(a+r\sin\theta)\omega^2\sin\theta)=-kr+m\,g\cos\theta$$

$$\hat{e}_\theta)\quad m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-a\,\omega^2\cos\theta-\omega^2 r\sin\theta\cos\theta)=-m\,g\sin\theta$$

$$\hat{j}\,')\quad 2m\omega(\dot{r}\sin\theta+r\,\dot{\theta}\cos\theta)=N$$

Por lo tanto, las dos primeras componentes de la ecuación son las ecuaciones de movimiento del sistema, mientras que la tercera da el valor de la normal con el plano.

d) Si ahora tenemos una posición de equilibrio relativo al plano con θ=30º y r=2*a*, sustituyendo en las ecuaciones de movimiento, se deberá verificar:

$$-m(a+2\,a\sin(30^o))\,\omega^2\sin(30^o)=-2\,ka+m\,g\cos(30^o)$$

$$-a\,\omega^2=-\frac{2\,k\,a}{m}+\frac{\sqrt{3}\,g}{2}$$

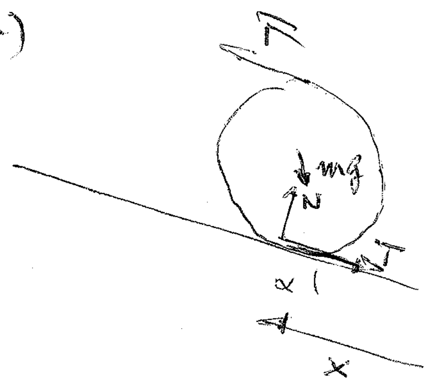
$$-m(a+2\,a\sin(30^o))\omega^2\cos(30^o)=-m\,g\sin(30^o)$$

$$\sqrt{3}\,a\,\omega^2=\frac{g}{2}$$

O sea, $\omega=\sqrt{\dfrac{g}{2\sqrt{3}\,a}}=\sqrt{\dfrac{k}{2m}}$.

Ejercicio 2

a)



vínculo: $\dot{x} = R\omega$

En $t=0$ $\quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = R\omega_0$

Ecuaciones cardinales:

$$m\ddot{x} = F - T - mg\sin\alpha$$

$$0 = N - mg\cos\alpha$$

$$\frac{1}{2} m R^2 \dot{\omega} = -R(F+T)$$

El disco desliza sobre la senda: $\quad T = fN$

Eliminando las reacciones, se obtiene la ecuación del movimiento:

$$\ddot{x} = -\frac{2}{3}(\sin\alpha + 2f\cos\alpha)\, g.$$

Integrando

$$\dot{x}^2 = R^2\omega_0^2 - \frac{4}{3}(\sin\alpha + 2f\cos\alpha)\, g\, x$$

Cuando $\dot{x}=0$, la distancia recorrida es

$$\boxed{x_{max} = \frac{3}{4}\frac{R^2\omega_0^2}{(\sin\alpha + 2f\cos\alpha)\, g}}$$

b) En equilibrio,

$N = mg\cos\alpha$

$F - T = mg\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad T = -\frac{mg}{2}\sin\alpha$

$F + T = 0$

$$|T| \leq fN \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_{min} = \frac{1}{2}\tan\alpha}$$

c) Si $f < f_{min}$, $\dot{x} < 0 \rightarrow \quad T = -fmg\cos\alpha$

La ecuación del movimiento es:

$$\ddot{x} = -\frac{2}{3}(\sin\alpha - 2f\cos\alpha)\, g.$$

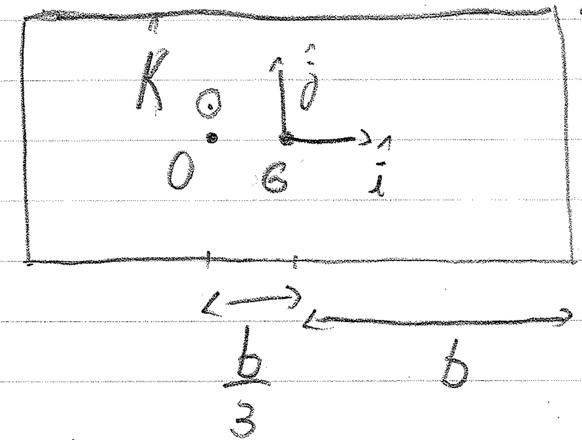
Integrando $\quad \dot{x}^2 = -\frac{4g}{3}(\sin\alpha - 2f\cos\alpha)(x - x_{max})$

En $x=0$,

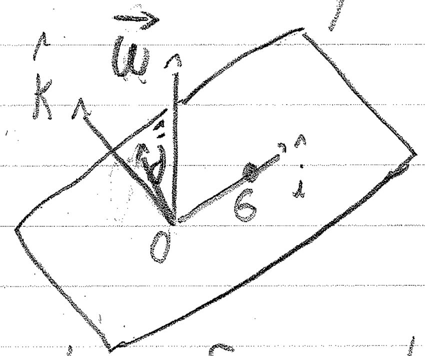
$$\boxed{\dot{x} = -\sqrt{\frac{\sin\alpha - 2f\cos\alpha}{\sin\alpha + 2f\cos\alpha}}\, R\omega_0}$$

EJERCICIO 3

a)



Sea $S:\{\hat{i},\hat{j},\hat{k}\}$ una base solidaria a la placa.



El tensor de inercia en la base S y en el centro de masas:

$$\mathbb{I}_G^{\{\hat{i},\hat{j},\hat{k}\}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}mb^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}m(a^2+b^2) \end{bmatrix}$$

Usando Steiner podemos obtener $\mathbb{I}_0$:

$$\mathbb{I}_0^{\{\hat{i},\hat{j},\hat{k}\}} = \left(\mathbb{I}_G^{\{\hat{i},\hat{j},\hat{k}\}} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{b}{3}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & m\left(\frac{b}{3}\right)^2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{9}mb^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}ma^2 + \frac{4}{9}mb^2 \end{pmatrix}$$

El momento angular: $\vec{L}_0 = \mathbb{I}_0 \vec{\omega}$

En la base S: $\vec{\omega} = \omega \cos\alpha \, \hat{i} + \omega \,\text{sen}\alpha \, \hat{k}$

$$\longrightarrow \boxed{\vec{L_O} = \frac{1}{3} m a^2 \omega \cos\alpha \,\hat{i} + \left(\frac{1}{3} m a^2 + \frac{4}{9} m b^2\right) \omega \operatorname{sen}\alpha \,\hat{k}}$$

b). La aceleración del centro de masas:

$$\vec{a_G} = -\frac{b}{3} \omega^2 (\operatorname{sen}\alpha \,\hat{i} - \cos\alpha \,\hat{k})$$

Primera cardinal:

$$m \vec{a_G} = m\vec{g} + \vec{R} = -mg(\cos\alpha \,\hat{i} + \operatorname{sen}\alpha \,\hat{k}) + \vec{R}$$

$$\longrightarrow \vec{R} = \left(mg\cos\alpha - m\frac{b}{3}\omega^2 \operatorname{sen}\alpha\right)\hat{i} + \left(mg \operatorname{sen}\alpha + \frac{mb\omega^2}{3}\cos\alpha\right)\hat{k}$$

Segunda cardinal:

$$\dot{\vec{L_O}} = \vec{M_O} - \overbrace{\frac{b}{3} \operatorname{sen}\alpha \, mg \,\hat{j}}^{\vec{M}_{PESO}}$$

$$\rightarrow \dot{\vec{L_O}} = \vec{\omega} \times \vec{L_O} = \frac{4}{9} m b^2 \omega^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \,\hat{j}$$

$$\longrightarrow \boxed{\vec{M_O} = \left(\frac{b}{3} mg \operatorname{sen}\alpha + \frac{4}{3} m b^2 \omega^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha\right)\hat{j}}$$