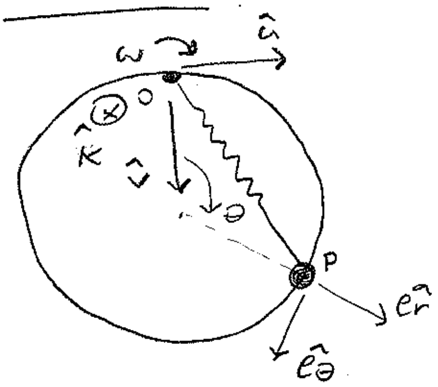
Ejercicio 1



$(\{\hat{u},\hat{v}\}$ solidaria a la guía$)$

a) Ec. de movimiento:

$$-K(P-O)\cdot\hat{e_\theta} = m\vec{a}\cdot\hat{e_\theta}$$

$$P-O = R\hat{v}+R\hat{e_r} : (P-O)\cdot\hat{e_\theta} = R\hat{v}\cdot\hat{e_\theta} = R\,\text{sen}\theta$$

$$\vec{a}\cdot\hat{e_\theta} = R\ddot{\theta} + \vec{a_T}\cdot\hat{e_\theta} \;;\; \vec{a_T} = \omega\hat{k}\times(\omega\hat{k}\times(P-O))$$

$$\vec{a_T} = \omega^2 R\,\hat{k}\times(\hat{k}\times(\hat{v}+\hat{e_r}))$$

$$\vec{a_T}\cdot\hat{e_\theta} = \omega^2 R(-\hat{v}\cdot\hat{e_\theta}) = -\omega^2 R\,\text{sen}\theta$$

$$\Rightarrow \quad -KR\,\text{sen}\theta = mR\ddot{\theta} - m\omega^2\text{sen}\theta$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \left(\frac{K}{m}-\omega^2\right)\text{sen}\theta = 0}$$

b) equilibrio y estabilidad: podemos estudiarlo a partir del U_{ef} cuya derivada conocemos:

$$\frac{dU_{ef}}{d\theta} = \left(\frac{K}{m}-\omega^2\right)\text{sen}\theta$$

equilibrio: $\frac{dU_{ef}}{d\theta} = 0$: si $\frac{K}{m} \neq \omega^2$ $\quad \text{sen}\theta = 0$: $\theta = 0, \pi$

si $\frac{K}{m} = \omega^2$: todas las posiciones son de equilibrio (y marginalmente estables)

estabilidad (suponiendo $\frac{K}{m}\neq\omega^2$): $\frac{d^2U_{ef}}{d\theta^2} = \left(\frac{K}{m}-\omega^2\right)\cos\theta$

$$\left.\frac{d^2U_{ef}}{d\theta^2}\right|_{0,\pi} = \pm\left(\frac{K}{m}-\omega^2\right)$$

; para $\frac{K}{m} > \omega^2$, $\theta = 0$ estable, $\theta = \pi$ inestable

(para $\frac{K}{m} < \omega^2$ se invierte la estabilidad)

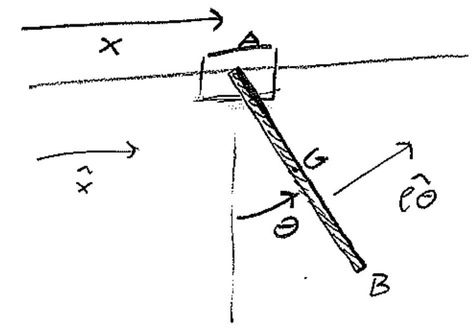
c) preintegrando la ec. de movimiento: $\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \left(\frac{K}{m}-\omega^2\right)\cos\theta = \frac{\dot{\theta}_0^2}{2} - \left(\frac{K}{m}-\omega^2\right)$

Para que la partícula nunca alcance $\theta = \pi$, se debe detener en un ángulo previo θ_D:

$$\cos\theta_D = 1 - \frac{\dot{\theta}_0^2}{2(K/m-\omega^2)} > -1 \; : \; \boxed{\dot{\theta}_0^2 < 4\left(K/m - \omega^2\right)}$$

(si $\theta = 0$ inestable, $\nexists\, \dot{\theta}_0$ que verifique y la partícula alcanza $\theta = \pi$)

Ejercicio 2



a) La primera cardinal al sistema es:

$$\vec{R} = \dot{\vec{P}}$$

proyectándola según la dirección horizontal $\hat{x}$:

$\vec{R}\cdot\hat{x} = \dot{p}_x$ y como no tengo fuerzas externas en la dirección $\hat{x}$:

$\boxed{0 = \dot{p}_x}$; p_x se conserva

b) $p_x = m\vec{v}_G\cdot\hat{x} + M\dot{x} = 0$ (el sistema parte del reposo)

$\vec{v}_G = \vec{v}_A + l\dot{\theta}\hat{e}_\theta \Rightarrow m(\dot{x} + l\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta\cdot\hat{x}) + M\dot{x} = 0$

$\boxed{(M+m)\dot{x} + ml\dot{\theta}\cos\theta = 0}$ (i)

Se conserva también la energía:

$$E = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}_G^{\,2} + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta = -mgl\cos\pi/3$$

$I_G = \int_{-l}^{l}\left(\frac{m}{2l}\right)dx\,x^2 = \frac{ml^2}{3}$; $\vec{v}_G^{\,2} = \vec{v}_G\cdot\vec{v}_G = (\dot{x}\hat{\imath} + l\dot{\theta}\hat{e}_\theta)\cdot(\dot{x}\hat{\imath} + l\dot{\theta}\hat{e}_\theta)$

$\vec{v}_G^{\,2} = \dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta = -mgl/2} \text{ (ii)}$$

c) $\vec{v}_B = \dot{x}\hat{\imath} + 2l\dot{\theta}\hat{e}_\theta$

$\vec{v}_B(\theta=0) = \left[\dot{x}(\theta=0) + 2l\dot{\theta}(\theta=0)\right]\hat{x}$

Considerando $\theta=0$ en (i) y (ii) podemos despejar $\dot{x}$ y $\dot{\theta}$ en $\theta=0$:

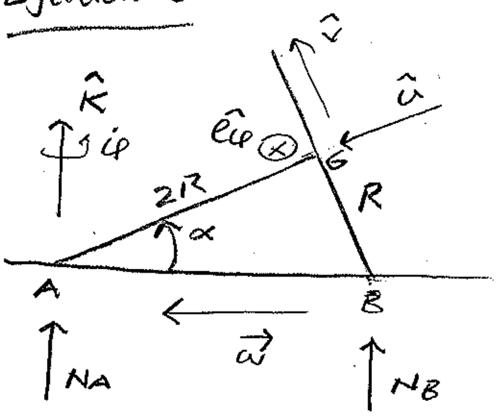
$(M+m)\dot{x} + ml\dot{\theta} = 0$; $\dot{x} = -\frac{m}{M+m}l\dot{\theta}$ (i')

$\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{\theta}\dot{x} - mgl = -mgl/2$ (ii')

sustituyendo (i') en (ii') tenemos $\dot{\theta}^2(\theta=0) = 3g/l\left(\frac{M+m}{4M+m}\right)$: $\dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{3g}{l}\left(\frac{M+m}{4M+m}\right)}$

$\Rightarrow \dot{x}(\theta=0) = \mp\frac{ml}{M+m}\sqrt{\frac{3g}{l}\frac{M+m}{4M+m}}$: $\boxed{\vec{v}_B = \pm\sqrt{3gl\frac{M+m}{4M+m}}\left(\frac{2M+m}{M+m}\right)\hat{x}}$

Ejercicio 3



a) La recta AB es eje instantáneo de rotación ya que $\vec{v_A}=\vec{v_B}=0$; como A pertenece a todos los ejes inst. , debe permanecer fijo

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\hat{K} + \dot{\psi}\hat{u}$$

Como AB es colineal con $\vec{\omega}$: $\vec{\omega}\cdot\hat{K} = 0$

$$\Rightarrow \dot{\varphi} + \dot{\psi}\hat{K}\cdot\hat{u} = 0 \quad \dot{\varphi} - \dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\alpha = 0 :$$

$$\dot{\psi} = \frac{\dot{\varphi}}{\mathrm{sen}\,\alpha} \quad \left(\text{con } \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\omega} = \dot{\varphi}\left(\hat{K} + \hat{u}/\mathrm{sen}\,\alpha\right)}$$

b) $\vec{L}_A = \mathbb{I}_A\vec{\omega}$ (A fijo)

$$I_G^{\{\hat{u},\hat{v},\hat{e}_\varphi\}} = \frac{MR^2}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow I_A^{\{\hat{u},\hat{v},\hat{e}_\varphi\}} = \begin{pmatrix} \frac{MR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4}+M4R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{4}+M4R^2 \end{pmatrix}$$

$$I_A^{\{\hat{u},\hat{v},\hat{e}_\varphi\}} = \frac{MR^2}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\hat{K} = -\mathrm{sen}\,\alpha\,\hat{u} + \cos\alpha\,\hat{v} \Rightarrow \vec{\omega} = \dot{\varphi}\left(\frac{\cos^2\alpha}{\mathrm{sen}\,\alpha}\hat{u} + \cos\alpha\,\hat{v}\right) = \dot{\varphi}\cos\alpha\left(\frac{\hat{u}}{\mathrm{tg}\,\alpha} + \hat{v}\right)$$

$$\dot{\varphi}\cos\alpha\,(2\hat{u} + \hat{v})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L}_A = \frac{MR^2}{4}\dot{\varphi}\cos\alpha\left(4\hat{u} + 17\hat{v}\right)}$$

c) Para que el trompo permanezca en contacto $N_A \geq 0$, $N_B \geq 0$

A partir de la 2ª C desde A : $\dot{\vec{L}}_A = \vec{M}_A^{(ext)}$

$$\dot{\vec{L}}_A\cdot\hat{e}_\varphi = \vec{M}_A^{(ext)}\cdot\hat{e}_\varphi = -\frac{2R}{\cos\alpha}N_B + Mg2R\cos\alpha$$

$$\dot{\vec{L}}_A\cdot\hat{e}_\varphi = \frac{MR^2}{4}\dot{\varphi}\cos\alpha\left(4\dot{\hat{u}} + 17\dot{\hat{v}}\right)\cdot\hat{e}_\varphi$$

$$\dot{\hat{u}} = \dot{\varphi}\hat{K}\times\hat{u} \quad (\text{idem } \hat{v}) \Rightarrow \dot{\vec{L}}_A\cdot\hat{e}_\varphi = -\frac{MR^2}{4}\dot{\varphi}^2\cos\alpha\left(4\cos\alpha + 17\,\mathrm{sen}\,\alpha\right)$$

$$\Rightarrow N_B = Mg\cos^2\alpha + \frac{MR}{8}\dot{\varphi}^2\cos^2\alpha\left(4\cos\alpha + 17\,\mathrm{sen}\,\alpha\right) \geq 0$$

1ª Cardinal según $\hat{K}$: $N_A + N_B = Mg$ $\quad N_A = Mg - N_B \geq 0$: $\boxed{\dot{\varphi}^2 \leq \frac{2}{4\cos\alpha + 17\,\mathrm{sen}\,\alpha}\,g/R}$