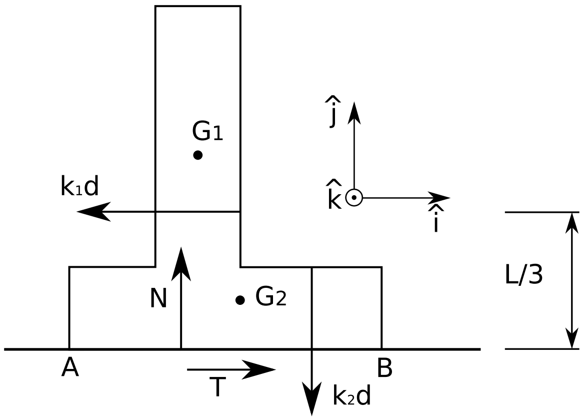
Solución Segundo Parcial 8 de Julio de 2009

Mecánica Newtoniana

Ejercicio 1



1. Si consideramos el bloque original formado por uno rectangular de masa $\frac{4M}{7}$ y centro de masa en G_2 más otro de masa $\frac{3M}{7}$ y centro de masa en G_1, podemos calcular el centro de masa del sistema total como:

$$(G-A) = \frac{3}{7}(G_1 - A) + \frac{4}{7}(G_2 - A)$$

Si escribimos las posiciones de G_1 y G_2 en función de $\hat{i}$ y $\hat{j}$, operando obtenemos:

$$\boxed{(G-A) = \frac{L}{56}(25\hat{i} + 19\hat{j})}$$

2. Para que el sistema este en equilibrio, la sumatoria de las fuerzas externas debe ser cero, de modo que obtenemos las siguientes ecuaciones.

$$T = k_1 = 3k_2 d$$

$$N = Mg + k_2 d$$

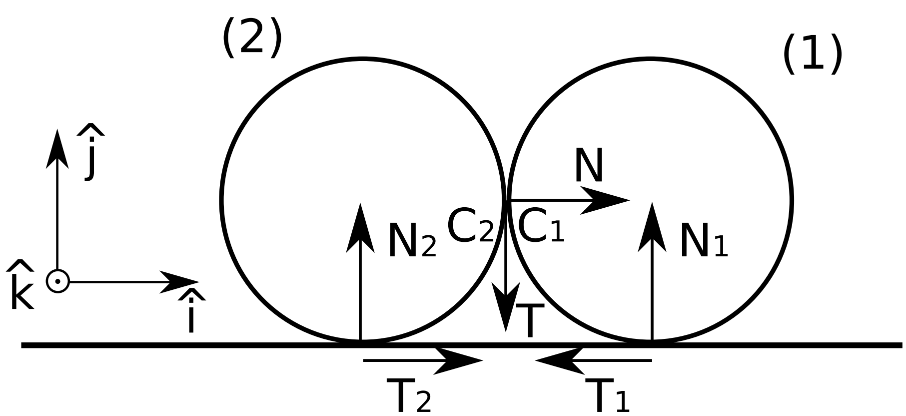
Verificando que $T \leq \mu N$ obtenemos:

$$\boxed{3k_2 d \leq \mu(Mg + k_2 d)}$$

Finalmente, la condición para que el sistema no vuelque:

$$\left.\begin{array}{lll} \vec{M}_B^{(a)} \cdot \hat{k} \geq 0 & & \text{que se verifica trivialmente} \\ \vec{M}_A^{(a)} \cdot \hat{k} \leq 0 & \Rightarrow & k_2 dL - k_2 d\frac{3}{4}L - Mg(G-A)\cdot\hat{i} \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{k_2 \leq \frac{25}{14}\left(\frac{Mg}{d}\right)}$$

Ejercicio 2



1. Si planteamos la 1^{er} y 2^{da} cardinal para ambos discos *en un entorno del instante inicial*, es decir, se verifica que (2) desliza y $(\vec{v}_{C_2} - \vec{v}_{C_1}) \cdot \hat{j} < 0$, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
N - T_1 &= m\ddot{x}_{G_1} && (1)\\
N_1 &= T + mg && (2)\\
I \cdot \dot{\omega}_1 &= r(T_1 - T) && (3)\\
T_2 - N &= m\ddot{x}_{G_2} && (4)\\
N_2 + T &= mg && (5)\\
I \cdot \dot{\omega}_2 &= -r(T_2 + T) && (6)
\end{aligned}
$$

Además, como ambos discos permanecen en contacto, $\ddot{x}_{G_1} = \ddot{x}_{G_2}$. El disco (1) permanece rodando sin deslizar, entonces $\ddot{x}_{G_1} = r\dot{\omega}_1$. Finalmente como el disco (2) desliza en los contactos con el suelo y el disco (1), $T = f\,N$ y $T_2 = f\,N_2$.

Utilizando las ecuaciones (1)-(6) y los vínculos antes mencionados, se pueden calcular las aceleraciones buscadas obteniendo:

$$\boxed{\dot{\omega}_1 = \frac{2}{21}\frac{g}{r}} \quad \boxed{\ddot{x}_{G_1} = \frac{2}{21}\,g} \quad \boxed{\dot{\omega}_2 = -\frac{16}{21}\frac{g}{r}}$$

2. Aplicando distribución de velocidades y utilizando la parte anterior, podemos calcular la velocidad del punto de contacto del disco (2) con el suelo, obteniendo:

$$v_{contacto} = \dot{x}_{G_2} - r\omega_2 = \dot{x}_{G_1} - r\omega_2 = \ddot{x}_{G_1}\,t + \dot{x}_{G_1}(0) - r\omega_2 = \frac{2}{21}\,g\,t - r\left(\omega_0 - \frac{16}{21}\frac{g}{r}\,t\right) \qquad (7)$$

Calculando de la ecuación 7 el instante de tiempo para el cual la velocidad del punto de contacto se hace cero, se obtiene $\boxed{t_0 = \frac{7}{6}\frac{r\omega_0}{g}}$

3. Aplicando distribución de velocidades para ambos discos, obtenemos $\vec{v}_{C_2} \cdot \hat{j} = -r\omega_2$ y $\vec{v}_{C_1} \cdot \hat{j} = r\omega_1$, de modo que $\vec{v}_{C_2} - \vec{v}_{C_1} = -r(\omega_1 + \omega_2) \cdot \hat{j}$. De la ecuación anterior, se deduce que mientras $\omega_1 + \omega_2 > 0$ la diferencia de la velocidad entre C_2 y C_1 será hacia abajo. Utilizando la primera parte del problema, podemos escribir,

$$\omega_1 + \omega_2 = \frac{2}{21}\frac{g}{r}\,t + \omega_0 - \frac{16}{21}\frac{g}{r}\,t = \omega_0 - \frac{14}{21}\frac{g}{r}\,t$$

Como podemos observar $\omega_1(t) + \omega_2(t) \geq \omega_1(t_0) + \omega_2(t_0) \quad \forall t \in [0, t_0]$, de modo que alcanza con verificar que $\omega_1(t_0) + \omega_2(t_0) > 0$. Utilizando el valor de t_0 calculado en la parte anterior, obtenemos:

$$\boxed{\omega_1(t_0) + \omega_2(t_0) = \omega_0 - \frac{7}{9}\omega_0 > 0}$$

4. Para analizar el movimiento de los discos para $t > t_0$, supongamos que que el disco 2 rueda sin deslizar y los discos continúan en contacto. Debemos verificar:

$$T_2 \leq f\,N_2, \qquad N, N_1, N_2 \geq 0 \qquad (8)$$

Si ambos discos permanecen en contacto, y a su vez ruedan sin deslizar *con el suelo*, tenemos que $\ddot{x}_{G_2} = r\dot{\omega}_2 = \ddot{x}_{G_1} = r\dot{\omega}_1$

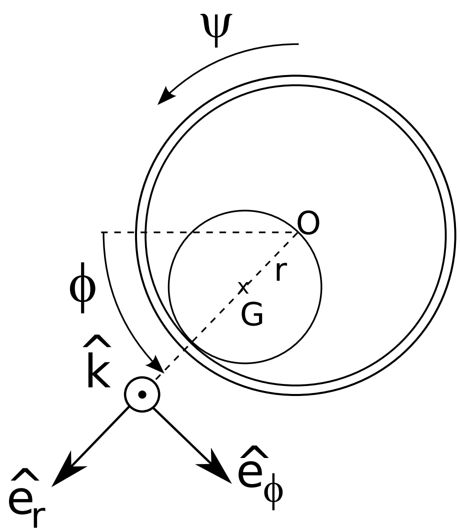
Rescribiendo la 1^{er} y 2^{da} cardinal para cada disco obtenemos:

$$
\begin{aligned}
N - T_1 &= mr\dot{\omega}_1 && (9)\\
N_1 &= fN + mg && (10)\\
I \cdot \dot{\omega}_1 &= r(T_1 - fN) && (11)\\
T_2 - N &= mr\dot{\omega}_1 && (12)\\
N_2 + fN &= mg && (13)\\
I \cdot \dot{\omega}_1 &= -r(T_2 + fN) && (14)
\end{aligned}
$$

Sumando 9 y 12 obtenemos $T_1 = T_2$, restando 11 y 14 obtenemos $T_1 + T_2 = 0$, de donde se deduce que $\boxed{T_1 = T_2 = 0}$. La primera condición dada en 8 se cumple entonces independientemente del valor de f y se puede ver fácilmente que las condiciones sobre las normales también se verifican.

Finalmente comparando 9 y 12 podemos concluir que $\dot{\omega}_1 = 0 \Rightarrow \ddot{x}_{G_1} = \ddot{x}_{G_2} = 0$ de donde se desprende que la velocidad de los centros de los discos permanecerá constante para $t \geq t_0$ con $\boxed{\dot{x}_{G_1} = \dot{x}_{G_2} = \frac{1}{9} r\omega_0}$

Ejercicio 3



1. La velocidad angular de la esfera la podemos escribir como, $\vec{\omega} = \vec{\omega'} + \dot{\psi}\hat{k}$ donde $\vec{\omega'}$ es la velocidad angular de la esfera relativa al casquete. Como la velocidad relativa de los puntos de contacto es nula, $\vec{\omega'} = \omega'(\hat{e}_r + \hat{k})$. Aplicando distribución de velocidades al punto de contacto con la cara lateral del casquete (B) , tenemos

$$\vec{v}_B = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times (B - G) \ \text{ donde } \vec{v}_B = 2r\dot{\psi}\hat{e}_\phi$$

Operando obtenemos $\omega' = \dot{\psi} - \dot{\phi}$ de modo que la velocidad angular de la esfera resulta:

$$\boxed{\vec{\omega} = (\dot{\psi} - \dot{\phi})\hat{e}_r + (2\dot{\psi} - \dot{\phi})\hat{k}}$$

2. Escribiendo la segunda cardinal para el sistema, en el punto O, obtenemos:

$$\vec{M}_O^{ext} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} - M\vec{v}_G \times \dot{O}$$

Como $\dot{O} = 0$, $\vec{M}_O^{ext} \cdot \hat{k} = 0$ y $\frac{d\hat{k}}{dt} = 0$ tenemos que $\frac{d(\vec{L}_O \cdot \hat{k})}{dt} = 0$, es decir, $\boxed{\vec{L}_O \cdot \hat{k} = cte}$

3. El momento angular del sistema, en la dirección $\hat{k}$, lo podemos calcular, obteniendo el momento de la esfera más el momento del casquete, es decir, $\vec{L}_O \cdot \hat{k} = \left[\vec{L}_O^{casquete} + \vec{L}_O^{esfera}\right] \cdot \hat{k}$.

Recordando la expresión para el momento angular de un rígido, y utilizando la velocidad angular de la esfera calculada en la primera parte, obtenemos:

$$L_z = I\dot{\psi} + [\mathbb{I}_G\vec{\omega} + m\vec{v}_G \times (O - G)] \cdot \hat{k} = I\dot{\psi} + \frac{2}{5}mr^2(2\dot{\psi} - \dot{\phi}) + mr^2\dot{\phi}$$

4. Utilizando la expresión de la energía cinética para un rígido:

$$T = \frac{1}{2}M\vec{v}_G^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_G\vec{\omega}$$

la energía cinética de la esfera es:

$$T_{esfera} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{5}mr^2\left[(\dot{\psi} - \dot{\phi})^2 + (2\dot{\psi} - \dot{\phi})^2\right]$$

Por lo que

$$\boxed{T_{sistema} = \frac{1}{2}I\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{5}mr^2\left[(\dot{\psi} - \dot{\phi})^2 + (2\dot{\psi} - \dot{\phi})^2\right]}$$