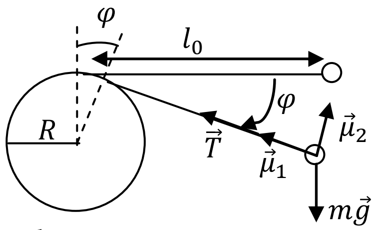
Solución del problema 1



Dónde:

$$\frac{d\vec{\mu}_1}{dt} = \vec{\mu}_2\dot{\varphi} \quad ; \quad \frac{d\vec{\mu}_2}{dt} = -\vec{\mu}_1\dot{\varphi}$$

1) $\vec{r} = -(l_0 - R\varphi)\vec{\mu}_1 + R\vec{\mu}_2$

$$\boxed{\vec{v} = -(l_0 - R\varphi)\dot{\varphi}\ \vec{\mu}_2}$$

$$\boxed{\vec{a} = (l_0\dot{\varphi}^2 - R\dot{\varphi}^2\varphi)\vec{\mu}_1 + (-l_0\ddot{\varphi} + R\dot{\varphi}^2 + R\varphi\ddot{\varphi})\ \vec{\mu}_2}$$

2) Planteando la ecuación de Newton:

$$\sum \vec{F} = m * \vec{a}$$

$$(T - mg\sin\varphi)\,\vec{\mu}_1 - mg\cos\varphi\,\vec{\mu}_2 = m(l_0\dot{\varphi}^2 - R\dot{\varphi}^2\varphi)\vec{\mu}_1 + m(-l_0\ddot{\varphi} + R\dot{\varphi}^2 + R\varphi\ddot{\varphi})\ \vec{\mu}_2$$

Por consiguiente la ecuación de movimiento se reduce a:

$$\boxed{-g\cos\varphi = -l_0\ddot{\varphi} + R\dot{\varphi}^2 + R\varphi\ddot{\varphi}}$$

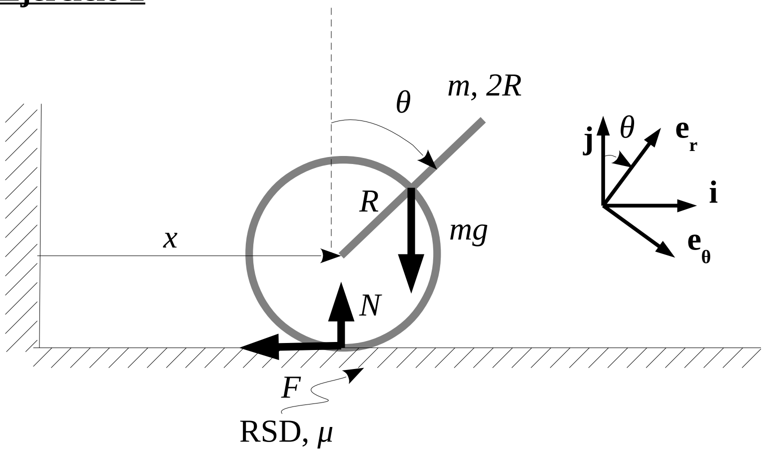
3) Teniendo en cuenta la ecuación para la tensión, debe probarse que ésta es mayor a 0 para la condición dada.

$$(T - mg\sin\varphi) = m(l_0\dot{\varphi}^2 - R\dot{\varphi}^2\varphi)$$

$$\boxed{T = m\dot{\varphi}^2(l_0 - R\varphi) + mg\sin\varphi}$$

Si $l_0 < R * \pi$, entonces, el máximo ángulo que puede recorrer la partícula antes de que el hilo se enrolle es $\varphi_0 = {}^{l_0}/_{R} < \pi$. Para ángulos menores que φ_0 el término $m\dot{\varphi}^2(l_0 - R\varphi)$ es siempre positivo, y el término de $mg\,sin\,\varphi$ es positivo, luego como la tensión es suma de esos dos términos, la tensión es siempre mayor a 0, o sea, el hilo se mantiene siempre tenso.

Solución del Ejercicio 2



a) Primero escribo el vector posición del centro de masa de la barra (ubicado en la periferia del aro):

$$\vec{r} = x\,\hat{i} + R\,\hat{e}_r = (x + R\sin\theta)\,\hat{i} + R\cos\theta\,\hat{j}.$$

Derivando tenemos:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\,\hat{i} + R\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta = (\dot{x} + R\dot{\theta}\cos\theta)\,\hat{i} - R\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{j}.$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\,\hat{i} + R\ddot{\theta}\,\hat{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\,\hat{e}_r = (\ddot{x} + R\ddot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta}^2\sin\theta)\,\hat{i} + (-R\ddot{\theta}\sin\theta - R\dot{\theta}^2\cos\theta)\,\hat{j}.$$

Las únicas fuerzas que actúan son N, F y el peso mg y se ilustran en la figura.

Como hay rodadura sin deslizar, la velocidad del punto de contacto con el piso debe ser nula, por lo que $\dot{x} = R\dot{\theta}$.

Escribo la primera cardinal de la barra:

$$m(\ddot{x} + R\ddot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta}^2\sin\theta) = -F$$
$$m(-R\ddot{\theta}\sin\theta - R\dot{\theta}^2\cos\theta) = N - mg$$

La segunda cardinal de la barra en su centro de masa queda como:

$$\frac{mR^2\ddot{\theta}}{3} = R\sin\theta\,N + R(1+\cos\theta)F$$

Utilizando las cardinales y la rodadura obtenemos la ecuación de movimiento:

$$mR^2\ddot{\theta}\left(\frac{7}{3} + 2\cos\theta\right) = mgR\sin\theta + mR^2\dot{\theta}^2\sin\theta$$

b) Si ahora $\dot{\theta} = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$ en el instante inicial, tenemos:

$$\ddot{\theta}=\frac{3g}{7R}$$

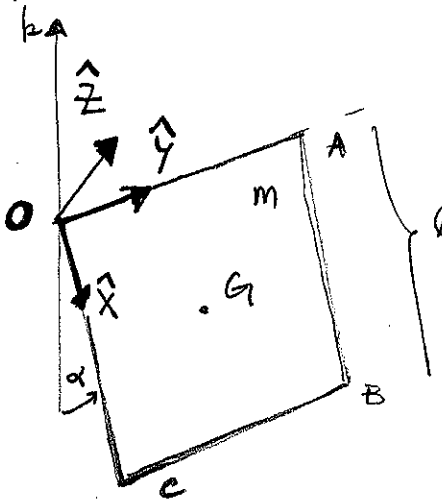
$$|F|=\frac{3mg}{7}$$

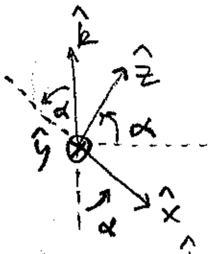
$$|N|=\frac{4mg}{7}$$

Sustituyendo en la condición de rozamiento estático $|F|\leq\mu|N|$, obtenemos $\mu\geq\frac{3}{4}.$

③

a)





$\hat{k} = \operatorname{sen}\alpha\,\hat{z} - \cos\alpha\,\hat{x}$

$$\mathbb{I}_{G\{\hat{x},\hat{y},\hat{z}\}} = \frac{m\ell^2}{12}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Teo. Steiner:

$$\mathbb{I}_{O\{\hat{x},\hat{y},\hat{z}\}} = \mathbb{I}_{G\{\hat{x},\hat{y},\hat{z}\}} + \frac{m\ell^2}{4}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$\mathbb{I}_{O\{\hat{x},\hat{y},\hat{z}\}} = \frac{m\ell^2}{12}\begin{pmatrix}4 & -3 & 0\\ -3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

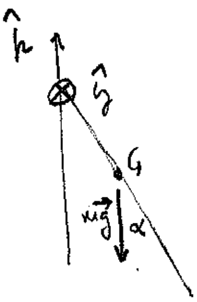
$$\vec{\omega}_{placa} = \Omega\hat{k} - \dot{\alpha}\,\hat{y} = \Omega(-\cos\alpha\,\hat{x} + \operatorname{sen}\alpha\,\hat{z}) - \dot{\alpha}\,\hat{y}$$

$$\boxed{\vec{L}_O = \mathbb{I}_O\vec{\omega} = \frac{m\ell^2}{12}\left[(-4\Omega\cos\alpha + 3\dot{\alpha})\,\hat{x} + (3\Omega\cos\alpha - 4\dot{\alpha})\,\hat{y} + 8\,\Omega\operatorname{sen}\alpha\,\hat{z}\right]}$$

b) $\vec{M}_O^{(ext)} = \dfrac{d\vec{L}_O}{dt}$ y como gira libremente en el eje $\hat{y}$ se anula el momento de las reactivas $\Rightarrow \vec{M}_O^{(ext)}\cdot\hat{y} = \vec{M}_O^{(peso)}\cdot\hat{y}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt}\cdot\hat{y} = \left(\mathbb{I}_O\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega}\times\vec{L}_O\right)\cdot\hat{y}\ ,\quad \vec{M}_O^{P}\cdot\hat{y} = \frac{\ell}{2}mg\operatorname{sen}\alpha$$

Si $\alpha = \alpha_0$ cte $\Rightarrow \dot{\vec{\omega}} = 0$ y $(\vec{\omega}\times\vec{L}_O)\cdot\hat{y} = \dfrac{\ell}{2}mg\operatorname{sen}\alpha_0$



$$(\vec{\omega}\times\vec{L}_O)\cdot\hat{y} = \frac{m\ell^2}{12}\left(-4\Omega^2\operatorname{sen}\alpha_0\cos\alpha_0 + 8\Omega^2\operatorname{sen}\alpha_0\cos\alpha_0\right)\quad y\quad \alpha_0 \neq 0, \pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\Omega^2 = \frac{3}{2}\frac{g}{\ell\cos\alpha_0}}$$