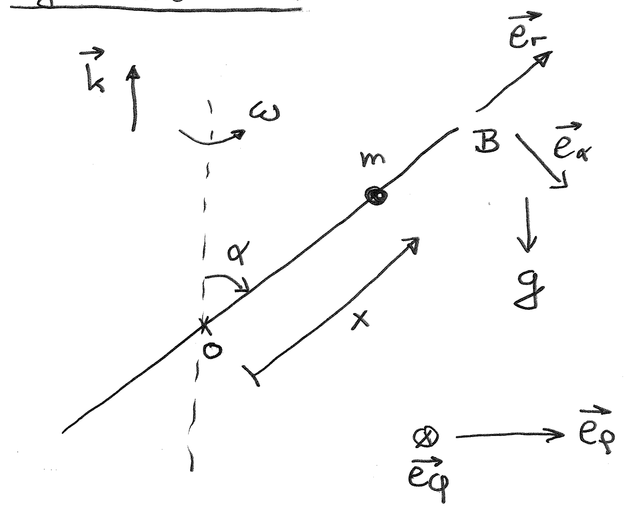
Ejercicio Nº 1:



$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

parte a: $\vec v = \vec v' + \vec v_T$

$\vec r' = x\vec e_r \Rightarrow \vec v' = \dot x\,\vec e_r$

$\vec v_T = \underbrace{\vec v_0}_{0} + \vec\omega\wedge\vec r' = \omega\vec k\wedge x\vec e_r = x\omega\operatorname{sen}\alpha\,\vec e_\varphi$

$\Rightarrow \boxed{\vec v = \dot x\,\vec e_r + x\omega\operatorname{sen}\alpha\,\vec e_\varphi}$

$\vec a = \underbrace{\vec a'}_{\ddot x\vec e_r} + \underbrace{\vec a_C}_{2\omega\vec k\wedge\dot x\vec e_r \,=\, 2\dot x\omega\operatorname{sen}\alpha\,\vec e_\varphi} + \vec a_T$

$\vec a_T = \underbrace{\vec a_0}_{0} + \underbrace{\dot{\vec\omega}}_{0}\wedge\vec r' + \vec\omega\wedge[\vec\omega\wedge\vec r'] = \omega\vec k\wedge(x\omega\operatorname{sen}\alpha\,\vec e_\varphi) = -x\omega^2\operatorname{sen}\alpha\,\vec e_\rho$

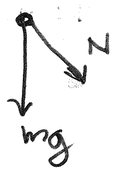
$\boxed{\vec a = \ddot x\,\vec e_r + 2\dot x\omega\operatorname{sen}\alpha\,\vec e_\varphi - x\omega^2\operatorname{sen}\alpha\,\vec e_\rho}$

Por derivación directa: $\vec v = \dot x\,\vec e_r + x\dot{\vec e}_r = \dot x\,\vec e_r + x\omega\operatorname{sen}\alpha\,\vec e_\varphi$ ✓

$\vec e_r = \operatorname{sen}\alpha\,\vec e_\rho + \cos\alpha\,\vec k \Rightarrow \dot{\vec e}_r = \operatorname{sen}\alpha\,\omega\,\vec e_\varphi$

$\vec a = \ddot x\,\vec e_r + 2\dot x\omega\operatorname{sen}\alpha\,\vec e_\varphi - x\omega^2\operatorname{sen}\alpha\,\vec e_\rho$ ✓

parte b: $m\vec a = -mg\vec k + N\vec e_\alpha + B\vec e_\varphi$



Guía Lisa $\Rightarrow m\vec a\cdot\vec e_r = -mg\vec k\cdot\vec e_r = -mg\cos\alpha$

$m\vec a\cdot\vec e_r = \ddot x - x\omega^2\operatorname{sen}\alpha\,\underbrace{\vec e_\rho\cdot\vec e_r}_{\operatorname{sen}\alpha}$

$\boxed{\ddot x - x\omega^2\operatorname{sen}^2\alpha = -g\cos\alpha}$

parte c: $x(0)=0,\ \dot x(0)=v_0>0$

$\int_0^t dt\,\dot x\ddot x = \int_0^t\left(-g\cos\alpha + x\omega^2\operatorname{sen}^2\alpha\right)\dot x\,dt = -g\cos\alpha\,x + \frac{x^2}{2}\omega^2\operatorname{sen}^2\alpha$

$\int_0^t dt\,\dot x\ddot x = \frac{\dot x^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}$

$\boxed{\dot x^2 \underbrace{- v_0^2 + 2g\cos\alpha\,x - x^2\omega^2\operatorname{sen}^2\alpha}_{f(x)} = 0}$

parte d: $W = \int_0^t P(t)\,dt \qquad P = (N\vec e_\alpha + B\vec e_\varphi)\cdot\vec v = Bx\omega\operatorname{sen}\alpha$

$B = m\vec a\cdot\vec e_\varphi = m\,2\dot x\omega\operatorname{sen}\alpha \Rightarrow W = \int_0^t dt\,2m\omega^2\operatorname{sen}^2\alpha\,x\dot x =$

$= \int_0^x dx\,x\,2m\omega^2\operatorname{sen}^2\alpha = \boxed{m\omega^2x^2\operatorname{sen}^2\alpha = W}$

Verificación parte c: $\Delta(\underbrace{T}_{\frac{m\dot x^2}{2} + \frac{mx^2\omega^2\operatorname{sen}^2\alpha}{2}} + \underbrace{U}_{mgx\cos\alpha}) = W = m\omega^2x^2\operatorname{sen}^2\alpha$

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} + mgx\cos\alpha - \frac{mx^2\omega^2\operatorname{sen}^2\alpha}{2} = 0 \quad \checkmark$$

parte e: $U(x) = mgx\cos\alpha - \dfrac{mx^2\omega^2\operatorname{sen}^2\alpha}{2}$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = mg\cos\alpha - mx\omega^2\operatorname{sen}\alpha \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\operatorname{sen}^2\alpha}}$$

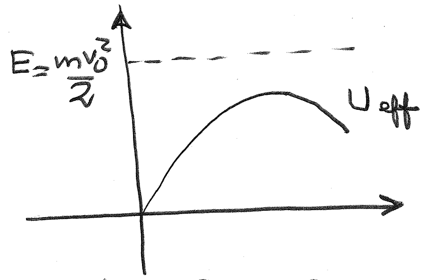
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -m\omega^2\operatorname{sen}\alpha < 0 \Rightarrow \text{Inestable}$$

$$\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

parte f: $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, $v_0 = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\dfrac{g}{\omega}$, $x = \sqrt{2}\dfrac{g}{\omega^2}$

$$\dot{x}^2 = \frac{3}{2}\frac{g^2}{\omega^2} - \underbrace{2g\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}g}{\omega^2}}_{\frac{2g^2}{\omega^2}} + \frac{2g^2}{\omega^4}\frac{\omega^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{g^2}{\omega^2} > 0$$

La posición $x = \dfrac{\sqrt{2}g}{\omega^2}$ es la posición de equilibrio inestable para $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ $\Rightarrow$ es un máximo de $f(x)$ $\Rightarrow$ si $\dot{x}^2 > 0$ en esta posición lo será en todo el intervalo



Otra forma de hacer la parte c: Teorema de la Energía en sist. móvil

1) Peso: Conservativo. $U = mgx\cos\alpha$

2) Reacción $\left.\begin{array}{l}\vec{N} = N\vec{e}_\alpha + B\vec{e}_\varphi \\ \vec{v}\,' = \dot{x}\,\vec{e}_r\end{array}\right\} P = \vec{N}\cdot\vec{v}\,' = 0$

3) Fuerzas Ficticias: a) Coriolis $\vec{F}_c = -2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}\,' \Rightarrow \vec{F}_c\cdot\vec{v}\,' = 0$

b) Transporte: $\vec{F}_T = mx\omega^2\operatorname{sen}\alpha\,\vec{e}_\rho$

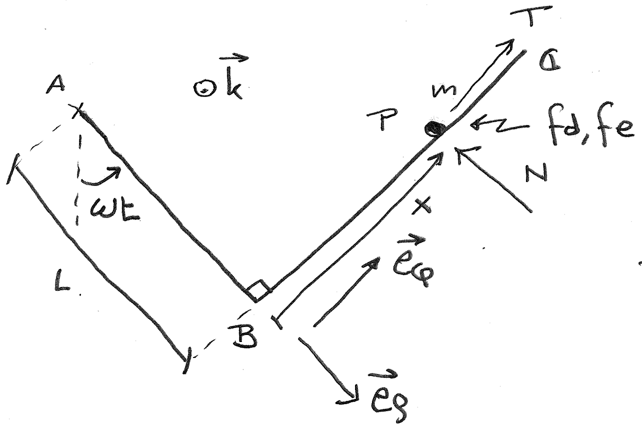
$$P_T = \vec{F}_T\cdot\vec{v}\,' = mx\omega^2\operatorname{sen}\alpha\,\overbrace{\vec{e}_\rho\cdot\vec{e}_r}^{\operatorname{sen}\alpha}\,\dot{x} = mx\dot{x}\omega^2\operatorname{sen}^2\alpha$$

$$W_T = \int_0^t dt\, mx\dot{x}\omega^2\operatorname{sen}^2\alpha = -m\omega^2\operatorname{sen}^2\alpha\frac{x^2}{2} \quad \text{Conservativa}$$

$T' + U' = E \qquad T' = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} \qquad U' = mgx\cos\alpha - m\omega^2\operatorname{sen}^2\alpha\dfrac{x^2}{2}$

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + mgx\cos\alpha - m\omega^2\operatorname{sen}^2\alpha\frac{x^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} \quad \checkmark$$

Ejercicio N° 2:



$\omega > 0$

$N \geq 0$

$f_d < f_e < 1$

parte a:

Defino $S' = \{B, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k}\}$

dirección B-A   Dirección C-A.

Otro sistema podría ser $S'' = \{A, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k}\}$

$\boxed{\vec{\omega} = \omega\vec{k}}$

$\vec{r}\,' = x\vec{e}_\varphi \Rightarrow \boxed{\vec{v}\,' = \dot{x}\vec{e}_\varphi} \Rightarrow \boxed{\vec{a}\,' = \ddot{x}\vec{e}_\varphi}$

parte b: $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_T$, $\vec{v}_T = \vec{v}_B + \vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'$ $\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_\varphi + L\omega\vec{e}_\varphi - x\omega\vec{e}_\rho}$

$\vec{v}_B = L\omega\vec{e}_\varphi$, $\quad \vec{\omega}\wedge\vec{r}\,' = \omega\vec{k}\wedge(x\vec{e}_\varphi) = -x\omega\vec{e}_\rho$

Si trabajo c/S'': $\vec{v}_T = \vec{v}_A + \vec{\omega}\wedge\vec{r} = \omega\vec{k}\wedge(L\vec{e}_\rho + x\vec{e}_\varphi) = L\omega\vec{e}_\varphi - x\omega\vec{e}_\rho$ ✓

$\vec{v}_A = \vec{0}$

$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_C + \vec{a}_T = \boxed{\ddot{x}\vec{e}_\varphi - 2\omega\dot{x}\vec{e}_\rho - L\omega^2\vec{e}_\rho - x\omega^2\vec{e}_\varphi = \vec{a}}$

$\vec{a}_C = 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}\,' = 2\omega\vec{k}\wedge\dot{x}\vec{e}_\varphi = -2\omega\dot{x}\vec{e}_\rho$

$\vec{a}_T = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}}\wedge\vec{r}\,' + \underbrace{\vec{\omega}\wedge[\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,']}_{} = -L\omega^2\vec{e}_\rho - x\omega^2\vec{e}_\varphi$

$\vec{a}_B = -L\omega^2\vec{e}_\rho$, $\quad \omega\vec{k}\wedge[\omega\vec{k}\wedge x\vec{e}_\varphi] = -x\omega^2\vec{k}\wedge\vec{e}_\rho = -x\omega^2\vec{e}_\varphi$

Si trabajo c/S'': $\vec{a}_T = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}}\wedge\vec{r} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r}) = \omega\vec{k}\wedge[\omega\vec{k}\wedge(L\vec{e}_\rho + x\vec{e}_\varphi)]$

$\vec{a}_A = \vec{0}$, $\dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$, $\quad = \omega^2\vec{k}\wedge(L\vec{e}_\varphi - x\vec{e}_\rho) = \omega^2(-L\vec{e}_\rho - x\vec{e}_\varphi)$

Por derivación directa: $\vec{r} = L\vec{e}_\rho + x\vec{e}_\varphi$

$\vec{v} = L\omega\vec{e}_\varphi + \dot{x}\vec{e}_\varphi - x\omega\vec{e}_\rho$ ✓

$\vec{a} = -L\omega^2\vec{e}_\rho + \ddot{x}\vec{e}_\varphi - 2\dot{x}\omega\vec{e}_\rho - x\omega^2\vec{e}_\varphi$ ✓

parte c: $m\vec{a} = -N\vec{e}_\rho + T\vec{e}_\varphi \Rightarrow m\vec{a}\cdot\vec{e}_\rho = -N = -mL\omega^2 - m2\dot{x}\omega$

$N = m(L\omega^2 + 2\dot{x}\omega) \geq 0 \Rightarrow \boxed{\dot{x} \geq -\frac{L\omega}{2}}$

$x(0) = d$, $\dot{x}(0) = 0$

parte d: $x(t) = d \;\forall t > 0 \Rightarrow \dot{x}(t) = 0$ y $\ddot{x}(t) = 0 \Rightarrow \vec{a} = -L\omega^2\vec{e}_\rho - d\omega^2\vec{e}_\varphi$

$\Rightarrow -N = -mL\omega^2 \Rightarrow N = mL\omega^2$

$T = -md\omega^2$

$|T| \leq f_e|N| \Rightarrow md\omega^2 \leq f_e mL\omega^2 \Rightarrow \boxed{f_e \geq \frac{d}{L}}$

Si no se cumple esa ecuación la T no será suficientemente grande para detener la partícula $\Rightarrow$ esta se moverá según $\vec{e}_\varphi$

(porque $\vec{T}$ es según $-\vec{e}_\varphi$) $\Rightarrow$ x crece

También se puede ver en el sistema relativo que hay una fuerza de arrastre.. $\vec{F}_T = -m\vec{a}_T = m\omega^2(L\vec{e}_\rho + d\,\vec{e}_\varphi)$ que moverá la partícula ↑ o sea dirigida según $\vec{e}_\varphi$ $\Rightarrow$ x creciente

parte e: $m\vec{a}\cdot\vec{e}_\varphi = T = m\ddot{x} - mx\omega^2$

$T = -f_d|N|\vec{e}_\varphi$ ← T se opone a la velocidad $\dot{x} > 0$

$N \geq 0$ para que no haya desprendimiento (lo es si $\dot{x} > 0$)

$T = -f_d m(L\omega^2 + 2\dot{x}\omega) = m\ddot{x} - mx\omega^2$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + 2f_d\omega\dot{x} - x\omega^2 = -f_d L\omega^2}$$

parte f: $d = L$, $f_d = 3/4$, $f_e < 1 = \frac{d}{L} \Rightarrow$ desliza

$x(t) = x_h + x_p \Rightarrow \ddot{x}_h + 2f_d\omega\dot{x}_h - x_h\omega^2 = 0$

$x_h = Ae^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 + 2f_d\omega\lambda - \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{-2f_d\omega \pm \sqrt{4f_d\omega^2 + 4\omega^2}}{2}$

$\lambda = \omega\left(-f_d \pm \sqrt{f_d^2+1}\right) = \omega\left(-\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}+1}\right) = \omega\left(-\frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}\right) \Rightarrow \lambda_+ = \frac{\omega}{2}$

$\lambda_- = -2\omega$

$x_h(t) = Ae^{\frac{\omega t}{2}} + Be^{-2\omega t}$

$x_p = C \Rightarrow -C\omega^2 = -\frac{3}{4}L\omega^2 \Rightarrow C = \frac{3L}{4}$

$x(t) = Ae^{\frac{\omega t}{2}} + Be^{-2\omega t} + \frac{3L}{4} \Rightarrow x(0) = L = A + B + \frac{3L}{4} \Rightarrow A + B = \frac{L}{4}$

$\dot{x}(t) = \frac{A\omega}{2}e^{\frac{\omega t}{2}} - 2B\omega e^{-2\omega t} \Rightarrow \dot{x}(0) = 0 = \frac{A\omega}{2} - 2B\omega \Rightarrow A = 4B$

$5B = \frac{L}{4} \Rightarrow B = \frac{L}{20} \Rightarrow A = \frac{4L}{20} = \frac{L}{5}$

$$\boxed{x(t) = \frac{L}{5}e^{\frac{\omega t}{2}} + \frac{L}{20}e^{-2\omega t} + \frac{3L}{4}}$$

$x(t) \to \infty$ si $t \to \infty \Rightarrow$ el movimiento <u>no va a estar acotado</u>

Se puede ver de $\dot{x} = \frac{L}{10}\left(e^{\frac{\omega t}{2}} - e^{-2\omega t}\right) > 0$ para $t > 0$ (el primer término crece y el segundo decrece monotonamente)

$\Rightarrow$ La partícula no se vuelve a detener $\Rightarrow$ se aleja de B infinitamente

Por otro lado $\dot{x} > 0 > -\frac{L\omega}{2} \Rightarrow N > 0 \Rightarrow$ no hay desprendimiento