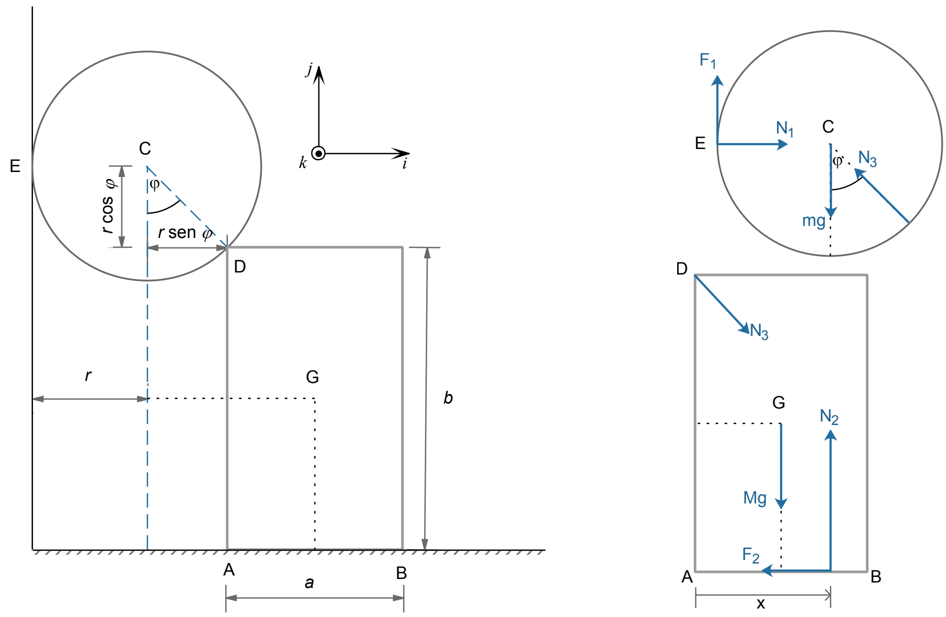
Solución del Segundo Parcial de Mecánica Newtoniana

Instituto de Física, Facultad de Ingeniería

4 de julio de 2019

Versión ampliada. Última actualización: 20 de junio de 2022.

Ejercicio 1



(a) Realizamos el diagrama de fuerzas y planteamos las cardinales para los cuerpos en equilibrio. N_1, N_2 y N_3 designan las componentes normales de las fuerzas de reacción, y F_1 y F_2 las fuerzas de fricción.

Para el disco,

- Primera cardinal:

$$\hat{j})\quad F_1 - mg + N_3\cos\varphi = 0 \qquad \hat{i})\quad N_1 - N_3 \operatorname{sen}\varphi = 0$$

- Segunda cardinal, en el punto C:

$$\hat{k})\quad rF_1 = 0$$

De las ecuaciones anteriores se despejan las fuerzas:

$$F_1 = 0 \qquad N_3 = \frac{mg}{\cos\varphi} = \sqrt{2}mg \qquad N_1 = mg\tan\varphi = mg$$

(usando que $\varphi = 45°$).
Para la placa,

- Primera Cardinal:

$$\hat{i}) \quad N_3 \operatorname{sen}\varphi - F_2 = 0 \qquad \hat{j}) \quad N_2 - N_3 \cos\varphi - Mg = 0$$

- Segunda cardinal con respecto al punto A (esquina inferior izquierda). Consideramos que la superficie horizontal ejerce una normal N_2 efectiva situada en x:

$$\hat{k}) \quad xN_2 - \frac{a}{2}Mg - bN_3 \operatorname{sen}\varphi = 0$$

De las ecuaciones anteriores se despejan las fuerzas y x (usando además los valores previamente hallados):

$$F_2 = mg\tan\varphi = mg \qquad N_2 = N_3\cos\varphi + Mg = (m+M)g$$

$$x = \frac{\frac{a}{2}Mg + bmg\tan\varphi}{(M+m)g} = \frac{\frac{1}{2}aM + bm}{M+m}$$

Hay varias condiciones para que el sistema permanezca en equilibrio:

1. Las reacciones tienen que tener componentes normales a las superficies que sean salientes. Esto se verifica inmediatamente, ya que N_1, N_2 y N_3 tienen valores positivos.

2. Para que el disco no deslice, se debe cumplir $|F_1| \le f_1|N_1|$, que se verifica ya que $F_1 = 0$.

3. Para que la placa no deslice, se debe cumplir $|F_2| \le f_2|N_2|$. Sustituyendo los valores calculados previamente:

$$mg\tan\varphi \le f_2(m+M)g \qquad \longleftrightarrow \qquad \boxed{f_2 \ge \frac{m}{M+m}}$$

4. Evitar el vuelco de la placa equivale a imponer $0 \le x \le a$. La primera desigualdad se satisface trivialmente. Para la segunda, sustituimos x:

$$x = \frac{\frac{1}{2}aM + bm}{M+m} \le a \quad \leftrightarrow \quad bm \le (M+m)a - \tfrac{1}{2}Ma = \left(\tfrac{1}{2}M + m\right)a$$

$$\longleftrightarrow \quad \boxed{\frac{b}{a} \le 1 + \frac{M}{2m}}$$

(b) Consideramos los valores de los parámetros que cumplen $M = 2m$, $b = 3a/2$ y $f_2 = 1/4$, y que el disco rueda sin deslizar. Evaluamos las condiciones (3) y (4) halladas en la parte anterior (las demás se satisfacen para todos los valores de los parámetros). Para la condición de no vuelco (4):

$$\frac{b}{a} = \frac{3}{2} \le 1 + \frac{M}{2m} = 1 + \frac{2m}{2m} = 2,$$

la cual se satisface. La condición de no deslizamiento (3) no se cumple, ya que

$$\frac{m}{M+m} = \frac{m}{3m} = \frac{1}{3} > f_2 = 1/4.$$

El equilibrio se rompe, entonces, porque la placa comienza a deslizar.

Sean y_C la altura (medida desde el suelo) del centro del disco C , $\vec{\omega} = -\dot{\theta}\hat{k}$ la velocidad angular del disco, y x_G la posición horizontal (medida desde la pared vertical) del centro de la placa G. Como suponemos que el disco rueda sin deslizar por la pared, encontramos el vínculo

$$\ddot{y}_C = -r\ddot{\theta}.$$

Además, dado que el disco y la placa se tocan en el punto D, obtenemos vínculos para x_G e y_C:

$$y_C = b + r\cos\varphi$$

$$x_G = r + r\operatorname{sen}\varphi + a/2$$

Derivamos las ecuaciones anteriores con respecto al tiempo dos veces para relacionar las aceleraciones:

$$\dot{y}_C = -r\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi, \qquad \ddot{y}_C = -r\dot{\varphi}^2\cos\varphi - r\ddot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi$$

$$\dot{x}_G = r\dot{\varphi}\cos\varphi, \qquad \ddot{x}_G = -r\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi$$

Evaluamos las relaciones anteriores en el instante en que se rompe el equilibrio (podemos definirlo como $t = 0$). El sistema parte del reposo, con $\varphi(0) = 45°$ y $\dot{\varphi}(0) = 0$. Entonces

$$\ddot{x}_G(0) = r\ddot{\varphi}(0)\cos 45° = r\ddot{\varphi}(0)\operatorname{sen} 45° = -\ddot{y}_C(0).$$

Planteamos nuevamente las cardinales de forma análoga a la parte anterior (con todas las cantidades evaluadas en $t = 0$).

Para el disco,

- Primera cardinal:

$$\hat{i})\quad 0 = N_1 - \frac{N_3}{\sqrt{2}} \qquad \hat{j})\quad m\ddot{y}_C = F_1 + \frac{N_3}{\sqrt{2}} - mg$$

- Segunda cardinal (respecto a C)

$$\hat{k})\quad \frac{mr^2}{2}\ddot{\theta} = rF_1$$

(usamos el momento de inercia del cilindro respecto a un eje por C perpendicular al plano del dibujo).

La ecuación para k permite escribir F_1 como

$$F_1 = \frac{mr^2\ddot{\theta}}{2r} = -\frac{m\ddot{y}_C}{2},$$

que se puede sustituir en la ecuación según $\hat{j}$:

$$m\ddot{y}_C - F_1 = \tfrac{3}{2}m\ddot{y}_C = \frac{N_3}{\sqrt{2}} - mg. \tag{1.1}$$

Para la placa, estudiamos el movimiento de su centro de masa con la primera cardinal. Usamos que, al deslizar, se cumple $|F_2| = f_2|N_2|$ (en $t = 0$ la placa comienza a alejarse de la pared, por lo que el sentido de la fricción es tal que $F_2 > 0$).

$$\hat{i})\quad M\ddot{x}_G = -2m\ddot{y}_C = \frac{N_3}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{4}N_2 \qquad \hat{j})\quad 0 = N_2 - \frac{N_3}{\sqrt{2}} - Mg$$

De la segunda ecuación se despeja $N_2 = 2mg + N_3/\sqrt{2}$ y se sustituye en la primera, obteniendo así

$$-2m\ddot{y}_C = \frac{3}{4\sqrt{2}}N_3 - \frac{mg}{2}. \tag{1.2}$$

Combinamos las ecuaciones (1) y (2) para eliminar N_3 (multiplicamos (1) por $-3/4$ y luego sumamos (2)):

$$-\frac{3}{4}\times\frac{3}{2}m\ddot{y}_C = -\frac{3}{4\sqrt{2}}N_3 + \frac{3}{4}mg \Rightarrow -\left(2+\frac{9}{8}\right)m\ddot{y}_C = \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)mg$$

$$\Rightarrow \quad -\ddot{y}_C = \boxed{\ddot{x}_G = \frac{2}{25}g}$$

en el instante en que se rompe el equilibrio.

(c) La condición que permite que el cilindro no deslice es $|F_1| \leq f_1|N_1|$. Usando el valor hallado para $\ddot{y}_C$, podemos determinar las fuerzas reactivas en $t = 0$ en el sistema de ecuaciones de la parte anterior.

$$F_1 = -\frac{m\ddot{y}_C}{2} = \frac{mg}{25} \qquad N_3 = \frac{3\sqrt{2}}{2}m\ddot{y}_C + \sqrt{2}mg = \frac{22\sqrt{2}}{25}mg$$

$$N_1 = \frac{N_3}{\sqrt{2}} = \frac{22}{25}mg \qquad N_2 = \frac{75}{25}mg$$

Por lo tanto,

$$|F_1| \leq f_1|N_1| \quad\longleftrightarrow\quad \frac{mg}{25} \leq f_1\frac{22}{25}mg \quad\longleftrightarrow\quad \boxed{f_1 \geq \frac{1}{22}}$$

Para llegar a esta solución hemos asumido que la placa no vuelca cuando el sistema sale del equilibrio. Para comprobar que esto es válido, aplicamos la segunda cardinal respecto a A en $t = 0$. El momento neto debe ser nulo. Por lo tanto,

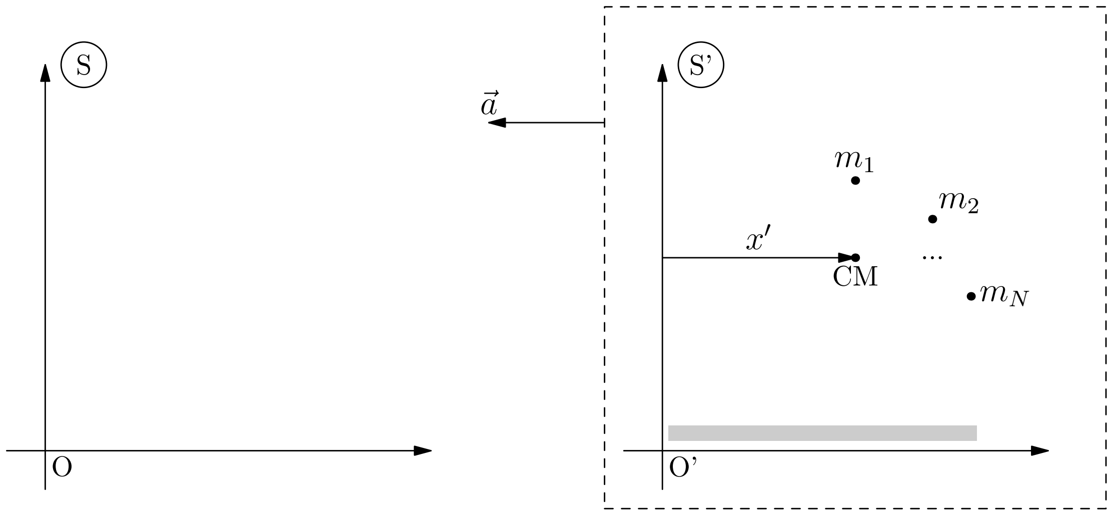
$$b\frac{N_3}{\sqrt{2}} + \frac{a}{2}2mg = xN_2.$$

Despejamos x como

$$x = \left(\frac{22}{22}b + a\right)\frac{25}{72} = \frac{58}{72}a.$$

Se verifica que $0 \leq x \leq a$, de manera que la placa no vuelca en un entorno del instante inicial.

Ejercicio 2



(a) Sea S el sistema de referencia inercial y S' un sistema de referencia solidario a la plataforma, acelerado con respecto a S. Para cada partícula i se cumple, en S (segunda ley de Newton):

$$\vec{F}_i^{\text{Neta}} = m_i \vec{a}_i \tag{2.1}$$

El sistema S' tiene aceleración $\vec{a}$ con respecto a S y, al no estar rotando, su velocidad angular $\vec{\omega}$ es nula. Usamos el Teorema de Coriolis para la partícula i:

$$\vec{a}_i = \vec{a}_i^T + \vec{a}'_i + \vec{a}_i^C$$

donde $\vec{a}'_i$ es la aceleración relativa a S', y las aceleraciones de transporte y de Coriolis valen

$$\begin{cases} \vec{a}_i^T = \vec{a}_{O'/O} + \cancelto{0}{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'_i} + \cancelto{0}{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i)} = \vec{a} = -a\hat{\imath} \\ \vec{a}_i^C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'_i = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Por hipótesis, las fuerzas sobre las partículas del sistema son conservativas o de potencia nula en S'; escribimos la fuerza neta como la suma de estos dos términos:

$$\vec{F}_i^{\text{Neta}} = \vec{F}_i^C + \vec{F}_i^{\text{P.N.}} \tag{2.3}$$

Combinamos las resultados de (1), (2) y (3):

$$\vec{F}_i^C + \vec{F}_i^{\text{P.N.}} = m_i(\vec{a} + \vec{a}'_i) \qquad \Rightarrow \qquad \vec{F}_i^C + \vec{F}_i^{\text{P.N.}} - m_i \vec{a} = m_i \vec{a}'_i$$

Multiplicamos escalarmente la ecuación anterior por $\vec{v}'_i$:

$$\vec{F}_i^C \cdot \vec{v}'_i + \underbrace{\vec{F}_i^{\text{P.N.}} \cdot \vec{v}'_i}_{=0} - m_i \vec{a} \cdot \vec{v}'_i = m_i \vec{a}'_i \cdot \vec{v}'_i$$

(obtenemos 0 para el término asociado a las fuerzas de potencia nula). Integramos la expresión anterior en el intervalo entre los tiempos t_0 y t_f:

$$\underbrace{\int_{t_0}^{t_f} \vec{F}_i^C \cdot \vec{v}'_i dt}_{I} - \underbrace{\int_{t_0}^{t_f} m_i \vec{a} \cdot \vec{v}'_i dt}_{II} = \underbrace{\int_{t_0}^{t_f} m_i \vec{a}'_i \cdot \vec{v}'_i dt}_{III} \tag{2.4}$$

El término I corresponde al trabajo de las fuerzas conservativas, que escribimos en términos de su potencial asociado U; el término II proviene de las fuerzas no inerciales y el término III representa la variación de la energía cinética.

$$I: \int_{t_0}^{t_f} \vec{F}_i^C \cdot \vec{v}'_i dt = -\int_{\vec{r}'_{i,0}}^{\vec{r}'_{i,f}} \nabla U_i(\vec{r}'_i)\cdot d\vec{r}'_i = -\int_0^f dU_i(\vec{r}'_i) = -\left(U_i(\vec{r}'_{i,f}) - U_i(\vec{r}'_{i,0})\right)$$

$$II: -\int_{t_0}^{t_f} m_i \vec{a}\cdot\vec{v}'_i dt = -m_i\vec{a}\cdot\int_{t_0}^{t_f}\vec{v}'_i dt = -m_i\vec{a}\cdot\left(\vec{r}'_{i,f} - \vec{r}'_{i,0}\right) = m_i a\left(x'_f - x'_i\right)$$

$$III: m_i\int_{t_0}^{t_f} \vec{a}'_i\cdot\vec{v}'_i dt = m_i\int_{t_0}^{t_f}\frac{1}{2}\frac{d\left(\vec{v}'_i\right)^2}{dt}dt = \frac{m_i{\vec{v}'_{i,f}}^2}{2} - \frac{m_i{\vec{v}'_{i,0}}^2}{2}$$

Reemplazando I, II y II en la ecuación (4), llegamos a

$$U_i(\vec{r}'_{i,f}) + m_i\vec{a}\cdot\vec{r}'_{i,f} + \frac{m_i{\vec{v}'_{i,f}}^2}{2} = U_i(\vec{r}'_{i,0}) + m_i\vec{a}\cdot\vec{r}'_{i,0} + \frac{m_i{\vec{v}'_{i,0}}^2}{2}$$

que significa que para cada partícula, la cantidad $U_i - m_i a x'_i + \frac{1}{2}m_i {v'_i}^2$ es constante. Luego, sumando en todas las partículas:

$$\begin{cases} \sum_i U_i(\vec{r}'_i) = U^{\text{total}} \\ \sum_i m_i\vec{a}\cdot\vec{r}'_i = \vec{a}\cdot\sum_i m_i\vec{r}'_i = M\vec{a}\cdot\vec{r}'_{\text{CM}} = -Max'_{\text{CM}} \\ \sum_i \frac{m_i {v'_i}^2}{2} = T'^{\text{ total}} \end{cases}$$

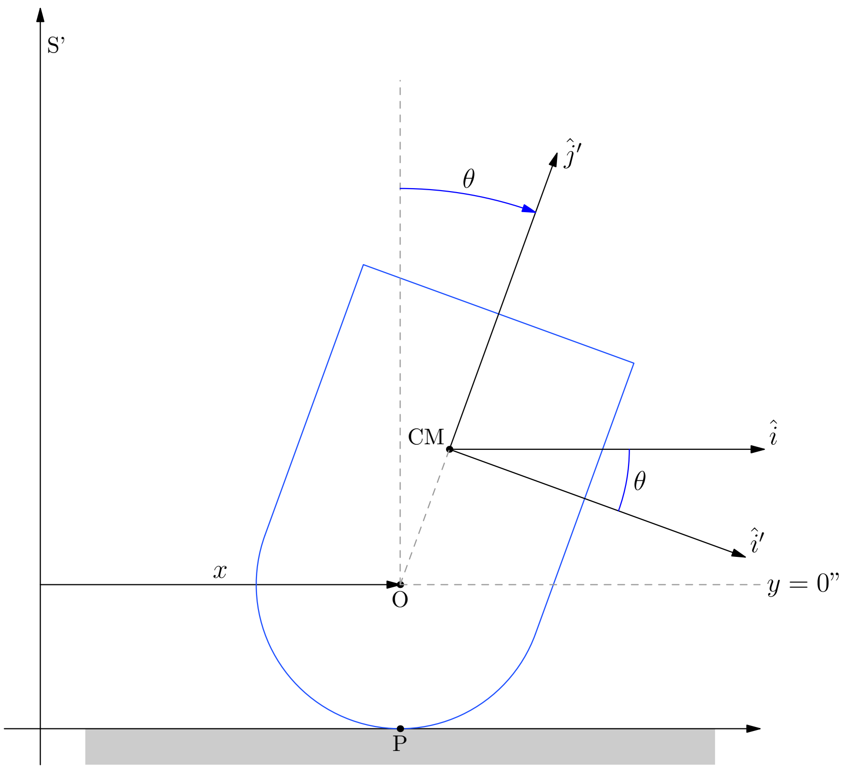
Por lo tanto, para el sistema de partículas en el referencial acelerado, se cumple

$$\boxed{H \overset{\text{def}}{=} U^{\text{total}} - Max'_{\text{CM}} + T'^{\text{ total}} = \text{cte.}}$$

(b) Para hallar la ecuación de movimiento podemos emplear la ley de conservación obtenida en la parte anterior:

$$U^{\text{total}} - Max'_{\text{CM}} + T'^{\text{ total}} = \text{const.} = H$$

El centro de masa (CM) del objeto se halla en el centro de la placa cuadrada homogénea, ya que el sector circular tiene masa despreciable.



La energía potencial total consiste en la gravitatoria en este caso. Tomando como altura de referencia la del punto O (que es fija),

$$U^{\text{total}} = U^{\text{P.G.}} = Mgy_{\text{CM}} = Mgr\cos\theta.$$

El término de potencial no inercial queda

$$-Max'_{\text{CM}} = -Ma(x + r\,\text{sen}\,\theta),$$

donde x marca la posición horizontal del punto O respecto a una línea de referencia en S'.

Planteamos la energía cinética del objeto (en el sistema S') como

$$T' = \frac{1}{2}M{v'_{\text{CM}}}^2 + \frac{1}{2}I_{33}^{\text{CM}}\dot{\theta}^2$$

El momento de inercia I_{33}^{CM} de la placa es dado como dato y vale

$$I_{33}^{\text{CM}} = \frac{ML^2}{6} \overset{L=2r}{=} \frac{M(2r)^2}{6} = \frac{2}{3}Mr^2$$

Para encontrar $\vec{r}'_{\text{CM}}$ derivamos su posición (escrita en S'). Utilizamos las bases $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$, solidaria a la plataforma, e $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$, solidaria al cuerpo rígido (ver figura). La velocidad angular es $-\dot{\theta}\hat{k}'$.

$$\vec{r}'_{\text{CM}} = x\hat{i} + r\hat{j}' \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \vec{v}'_{\text{CM}} &= \dot{x}\hat{i} + r\left(-\dot{\theta}\hat{k}' \times \hat{j}'\right) \\ &= \dot{x}\hat{i} + r\dot{\theta}\hat{i}' \\ &= \dot{x}\left(\cos\theta\,\hat{i}' + \text{sen}\,\theta\,\hat{j}'\right) + r\dot{\theta}\hat{i}' \\ &= \left(\dot{x}\cos\theta + r\dot{\theta}\right)\hat{i} + \dot{x}\,\text{sen}\,\theta\,\hat{j}' \end{aligned}$$

Entonces, la energía cinética queda

$$T' = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}\cos\theta + r\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2\,\mathrm{sen}^2\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}Mr^2\right)\dot{\theta}^2$$

Hay un solo grado de libertad, ya que el cuerpo rueda sin deslizar. Obtenemos una ecuación de vínculo al calcular la velocidad del punto O a partir de la del punto Pde contacto con la plataforma:

$$\vec{v}'_O = \vec{v}'_P + \vec{\omega} \times \left(\vec{r}'_O - \vec{r}'_P\right)$$

$$\rightarrow \dot{x}\hat{i} = 0 - \dot{\theta}\hat{k} \times \left(-r\hat{j}\right) = r\dot{\theta}\hat{i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{x} = r\dot{\theta}} \quad \overset{\text{int.}}{\rightarrow} \quad \boxed{x = r\theta + x(0)}$$

El potencial no inercial en función de θ queda, por lo tanto,

$$-Max'_{\text{CM}} = -Mar(\theta + \mathrm{sen}\,\theta) - Max(0)$$

(podemos elegir la posición de referencia inicial tal que $x(0) = 0$). Reescribimos la energía cinética también en función de θ:

$$\begin{aligned}
T' =& \frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}^2(1+\cos\theta)^2 + \frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}^2\theta + \frac{1}{3}Mr^2\dot{\theta}^2 \\
=& \frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}^2\left(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta\right) + \frac{1}{3}Mr^2\dot{\theta}^2 \\
=& Mr^2\dot{\theta}^2\left(1 + \cos\theta + \frac{1}{3}\right) \\
& \Rightarrow \quad \boxed{T' = mr^2\dot{\theta}^2\left(\frac{4}{3} + \cos\theta\right)}
\end{aligned}$$

Sustituimos en H:

$$H = Mgr\cos\theta - Mar(\theta + \mathrm{sen}\,\theta) + mr^2\dot{\theta}^2\left(\frac{4}{3} + \cos\theta\right) = \text{cte.}$$

Obtenemos una ecuación de movimiento en θ si condideramos la derivada de H con respecto a t:

$$\frac{dH}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad -Mgr\,\mathrm{sen}\,\theta\dot{\theta} - Mar\dot{\theta}(1+\cos\theta) + 2mr^2\dot{\theta}\ddot{\theta}\left(\frac{4}{3} + \cos\theta\right) - mr^2\dot{\theta}^3\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{2r\ddot{\theta}\left(\frac{4}{3} + \cos\theta\right) - r\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}\,\theta - g\,\mathrm{sen}\,\theta - a(1+\cos\theta) = 0}$$

(c) La ecuación de movimiento fue obtenida asumiendo que el rígido está apoyado sobre la plataforma a través de su lado curvo. Por lo tanto buscamos posiciones de equilibrio relativo en ese caso, o sea en el rango $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Buscamos soluciones estacionarias; imponiendo $\dot{\theta} = 0$ y $\ddot{\theta} = 0$ en la ecuación de movimiento, llegamos a

$$-g\,\mathrm{sen}\,\theta = a(1+\cos\theta)$$

Observamos que para cualquier valor de θ se cumple $1 + cos\theta \geqslant 0$ y por eso

$$\mathrm{sen}\,\theta = -\frac{a}{g}(1+\cos\theta) \leqslant 0.$$

Por las propiedades de la función seno, concluimos que el ángulo debe verificar $-\pi \leq \theta \leq 0$ para que se cumpla la desigualdad anterior; como además debe pertenecer al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, llegamos a que el ángulo debe satisfacer $\pi/2 < \theta \leqslant 0$ y por consiguiente, se cumple $\cos\theta \geqslant 0$. Entonces, buscamos valores de equilibrio θ_{eq} tales que $\operatorname{sen}\theta_{eq} < 0$ y $\cos\theta_{eq} > 0$.

Operamos sobre la ecuación de movimiento:

$$\begin{aligned}
&-g\operatorname{sen}\theta = a(1+\cos\theta) \\
&-g\operatorname{sen}\theta - a = a\cos\theta \quad \rightarrow \quad g^2\operatorname{sen}^2\theta + a^2 + 2ag\operatorname{sen}\theta = a^2\cos^2\theta = a^2 - a^2\operatorname{sen}\theta \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; \rightarrow \quad \left(a^2+g^2\right)\operatorname{sen}^2\theta + 2ag\operatorname{sen}\theta = 0 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; \rightarrow \quad \operatorname{sen}\theta\left[\left(a^2+g^2\right)\operatorname{sen}\theta + 2ag\right] = 0
\end{aligned}$$

Investigamos las soluciones matemáticas de la última igualdad:

- $\operatorname{sen}\theta = 0$
  $\theta = 0$ no satisface la ecuación de movimiento ($\cos 0 = +1$); descartamos esta opción.
  $\theta = \pi$ queda fuera del intervalo válido para θ_{eq}.

- $\left(a^2+g^2\right)\operatorname{sen}\theta + 2a = 0$
  Consideremos la solución

  $$\operatorname{sen}\theta = -\frac{2ag}{a^2+g^2}$$

  que siempre es negativa; el ángulo existe si

  $$\begin{aligned}
  \left|\frac{2ag}{a^2+g^2}\right| \leq 1 \quad &\longleftrightarrow \quad 2ag \leq a^2+g^2 \\
  &\longleftrightarrow \quad a^2+g^2-2ag \geq 0 \\
  &\longleftrightarrow \quad (a-g)^2 \geq 0
  \end{aligned}$$

que se satisface en todos los casos. Para satisfacer la ecuación de movimiento se debe cumplir, además,

$$\cos\theta = -\frac{g}{a}\operatorname{sen}\theta - 1 = \frac{g^2-a^2}{g^2+a^2} > 0.$$

La desigualdad solo se cumple si $g > a$.

Para clasificar la solución de equilibrio, estudiamos el potencial efectivo $U = Mgr\cos\theta - Mar(\theta + \operatorname{sen}\theta)$.

$$\frac{dU}{d\theta} = -Mgr\operatorname{sen}\theta - Mar - Mar\cos\theta$$

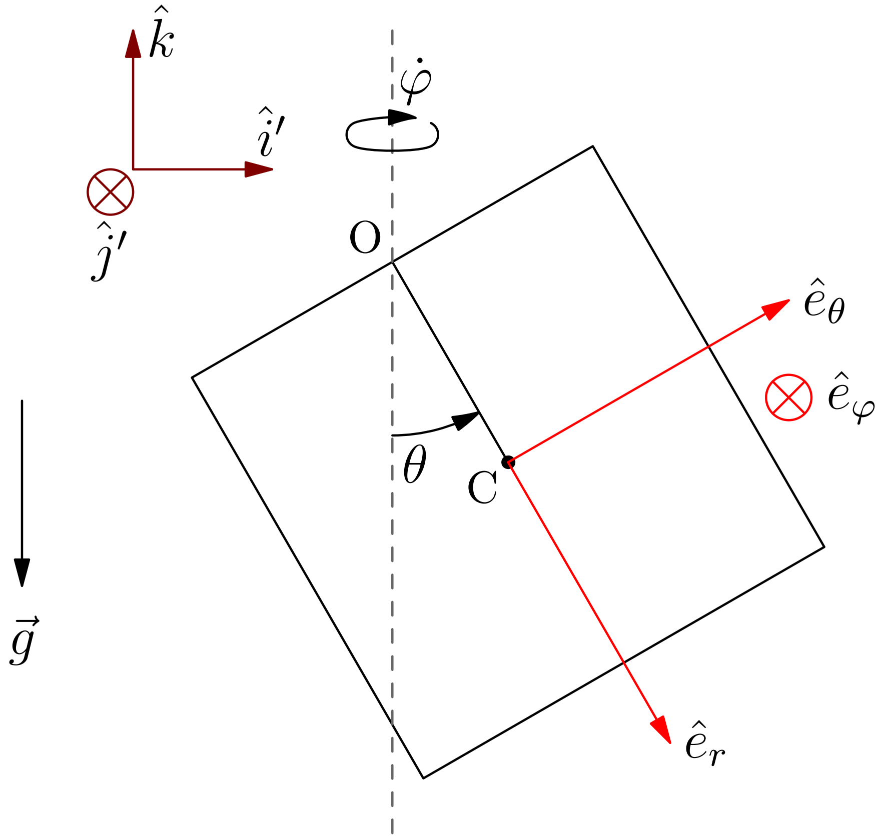
$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = -Mgr\cos\theta + Mar\operatorname{sen}\theta = Mr(a\operatorname{sen}\theta - g\cos\theta)$$

Evaluamos la derivada segunda en la solución hallada:

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = Mr\left(a\left(-\frac{2ag}{a^2+g^2}\right) - g\left(\frac{g^2-a^2}{a^2+g^2}\right)\right) = Mrg\frac{-2a^2-g^2+a^2}{a^2+g^2} = -Mrg < 0$$

Como el resultado es negativo, el punto de equilibrio relativo es *inestable*.

Ejercicio 3



(a) Consideremos el vector unitario $\hat{k}$ en la dirección vertical y la base $\{\hat{e}_\theta, \hat{e}_r, \hat{e}_\varphi\}$ solidaria a la placa (ver figura). La velocidad angular del cuerpo es $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\hat{k} - \dot{\theta}\hat{e}_\varphi$.

El tensor de inercia de la placa con respecto a su centro C, en la base solidaria elegida, es

$$\mathbb{I}_C = \frac{ma^2}{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Para hallar el tensor respecto al punto O usamos el teorema de Steiner:

$\mathbb{J}_{\alpha\beta} = m\left[\left(\vec{r}_C - \vec{r}_O\right)^2 \delta_{\alpha\beta} - \left(\vec{r}_C - \vec{r}_O\right)_\alpha \left(\vec{r}_C - \vec{r}_O\right)_\beta\right]$.

Usando las posiciones de O y C:

$$\vec{r}_C - \vec{r}_O = \frac{a}{2}\hat{e}_r = \frac{a}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbb{J} = \frac{ma^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, el tensor de inercia con respecto a O, usando la misma base, es

$$\mathbb{I}_O = \mathbb{I}_C + \mathbb{J} = \frac{ma^2}{12}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Observamos que $\hat{k} = -\cos\theta\hat{e}_r + \operatorname{sen}\theta\hat{e}_\theta$. El momento angular respecto a O se calcula como

$$\vec{L}_O = \mathbb{I}_O\vec{\omega} = \frac{ma^2}{12}\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\\ -\dot{\varphi}\cos\theta\\ -\dot{\theta}\end{pmatrix} = \boxed{ma^2\left(\frac{\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta}{3}\hat{e}_\theta - \frac{\dot{\varphi}\cos\theta}{12}\hat{e}_r - \frac{5\dot{\theta}}{12}\hat{e}_\varphi\right)}$$

(b) Primera alternativa: La energía mecánica E de la placa se conserva porque la articulación lisa no realiza trabajo y el peso es una fuerza conservativa. Además, los momentos externos con respecto a O verifican

$$\vec{\mathscr{M}}_O^{(\text{ext})}\cdot\hat{k} = 0$$

y por lo tanto se conserva la componente vertical del momento angular:

$$\vec{L}_O\cdot\hat{k} = \text{cte.}(= L_z)$$

Calculamos la energía cinética del cuerpo considerando la rotación con respecto al punto O (fijo), de manera que

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\mathbb{I}_O\vec{\omega} = \frac{1}{2}ma^2\left(\frac{\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}^2\theta}{3} + \frac{\dot{\varphi}^2\cos^2\theta}{12} + \frac{5}{12}\dot{\theta}^2\right) = \frac{1}{2}ma^2\left(\frac{\dot{\varphi}^2\left(1+3\operatorname{sen}^2\theta\right)}{12} + \frac{5}{12}\dot{\theta}^2\right)$$

y añadimos la energía potencial gravitatoria $U_g = -\frac{1}{2}mga\cos\theta$ para obtener la energía mecánica:

$$E = \frac{1}{2}ma^2\left(\frac{\dot{\varphi}^2\left(1+3\operatorname{sen}^2\theta\right)}{12} + \frac{5}{12}\dot{\theta}^2\right) - \frac{mga\cos\theta}{2}$$

Proyectamos el momento angular en la dirección vertical para determinar L_z. Tomando en cuenta

$$\hat{e}_\theta\cdot\hat{k} = \operatorname{sen}\theta, \qquad \hat{e}_r\cdot\hat{k} = -\cos\theta, \qquad \hat{e}_\varphi\cdot\hat{k} = 0,$$

se obtiene

$$L_z = ma^2\left(\frac{\dot{\varphi}\operatorname{sen}^2\theta}{3} + \frac{\dot{\varphi}\cos^2\theta}{12}\right) = \frac{ma^2\dot{\varphi}}{12}\left(1+3\operatorname{sen}^2\theta\right)$$

La última ecuación permite escribir

$$\boxed{\dot{\varphi} = \frac{12L_z}{ma^2(1+3\operatorname{sen}^2\theta)}}$$

Sustituyendo lo anterior en E:

$$E = \frac{1}{2}ma^2\left[\left(\frac{12L_z}{ma^2}\right)^2\frac{1}{12}\frac{\left(1+3\operatorname{sen}^2\theta\right)}{(1+3\operatorname{sen}^2\theta)^2} + \frac{5}{12}\dot{\theta}^2\right] - \frac{mga\cos\theta}{2}$$

$$\boxed{E = \frac{6}{ma^2}\frac{{L_z}^2}{(1+3\operatorname{sen}^2\theta)} + \frac{5}{24}ma^2\dot{\theta}^2 - \frac{mga\cos\theta}{2}}$$

(c) Primera alternativa: Consideramos $\dot{\varphi}(t)=\dot{\varphi}_0$, $\theta(t)=\pi/3=\theta_0$ y $\dot{\theta}(t)=0$ (recordemos que $\operatorname{sen}(\pi/3)=\sqrt{3}/2$ y $\cos(\pi/3)=1/2$). Usando los resultados de la parte anterior, tenemos la expresión

$$\left(\frac{L_z}{1+3\operatorname{sen}^2\theta}\right)^2=\left(\frac{ma^2\dot{\varphi}_0}{12}\right)^2 \tag{3.1}$$

Consideremos ahora el potencial efectivo $U_{ef}(\theta)$. Queremos que presente un mínimo en $\theta=\theta_0=\pi/3$. El potencial es

$$U_{ef}(\theta)=\frac{6}{ma^2}\frac{{L_z}^2}{(1+3\operatorname{sen}^2\theta)}-\frac{mga\cos\theta}{2}$$

y su derivada

$$\frac{\partial U_{ef}}{\partial\theta}=\frac{6}{ma^2}\frac{L_z}{(1+3\operatorname{sen}^2\theta)^2}(-1)6\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\frac{mga\operatorname{sen}\theta}{2}\Bigg|_{\theta=\theta_0}=0$$

Dividimos por $\operatorname{sen}\theta_0$ y usamos la relación (1):

$$-\frac{6}{ma^2}\frac{\left(ma^2\right)^2\dot{\varphi}_0^2}{12^2}\underbrace{\cos\theta_0}_{=\frac{1}{2}}+\frac{mga}{2}=0\quad\Rightarrow\quad\frac{6^2\cancel{m}\cancel{a^2}\dot{\varphi}_0^2}{12^2}=\cancel{m}g\cancel{a}$$

Por lo tanto,

$$\dot{\varphi}_0^2=\frac{4g}{a}\quad\to\quad\boxed{\dot{\varphi}_0=2\sqrt{\frac{g}{a}}}$$

* * *

(b) Segunda alternativa: Se pueden hallar las ecuaciones de movimiento a partir de la segunda cardinal en O. Las derivadas temporales de los vectores de la base solidaria al rígido son

$$\dot{\hat{e}}_\theta=\vec{\omega}\times\hat{e}_\theta=\left(\dot{\varphi}\hat{k}-\dot{\theta}\hat{e}_\varphi\right)\times\hat{e}_\theta=\dot{\varphi}\cos\theta\hat{e}_\varphi-\dot{\theta}\hat{e}_r$$

$$\dot{\hat{e}}_r=\vec{\omega}\times\hat{e}_r=\left(\dot{\varphi}\hat{k}-\dot{\theta}\hat{e}_\varphi\right)\times\hat{e}_r=\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\hat{e}_\varphi+\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

$$\dot{\hat{e}}_\varphi=\vec{\omega}\times\hat{e}_\varphi=\left(\dot{\varphi}\hat{k}-\dot{\theta}\hat{e}_\varphi\right)\times\hat{e}_\varphi=\dot{\varphi}\hat{i}'=\dot{\varphi}\cos\theta\hat{e}_\theta+\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\hat{e}_r$$

La derivada del momento angular es

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}=ma^2\left[\left(\frac{\ddot{\varphi}\operatorname{sen}\theta}{3}+\frac{\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta}{3}\right)\hat{e}_\theta+\left(\frac{\dot{\varphi}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta-\ddot{\varphi}\cos\theta}{12}\right)\hat{e}_r-\frac{5}{12}\ddot{\theta}\hat{e}_\varphi\right.$$
$$\left.+\frac{\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta}{3}\underbrace{\left(\dot{\varphi}\cos\theta\hat{e}_\varphi-\dot{\theta}\hat{e}_r\right)}_{\dot{\hat{e}}_\theta}-\frac{\dot{\varphi}\cos\theta}{12}\underbrace{\left(\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\hat{e}_\varphi+\dot{\theta}\hat{e}_\theta\right)}_{\dot{\hat{e}}_r}+\frac{5}{12}\dot{\theta}\dot{\varphi}\underbrace{\left(\dot{\varphi}\cos\theta\hat{e}_\theta+\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\hat{e}_r\right)}_{\dot{\hat{e}}_\varphi}\right]$$

A continuación planteamos la segunda cardinal con respecto a O, proyectada en diferentes direcciones. La proyección sobre $\hat{e}_\varphi$ del momento de fuerza externo es

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O^{(\text{ext})} \cdot \hat{e}_\varphi = \frac{mga\,\mathrm{sen}\,\theta}{2}, \qquad \text{(momento debido al peso)}$$

por lo tanto

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} \cdot \hat{e}_\varphi = \boxed{\frac{ma^2}{12}\left(3\dot{\varphi}^2 \,\mathrm{sen}\,\theta \cos\theta - 5\ddot{\theta}\right) = \frac{mga\,\mathrm{sen}\,\theta}{2}} \tag{3.2}$$

La proyección sobre $\hat{k}$ del momento externo es nula:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O^{(\text{ext})} \cdot \hat{k} = 0$$

y así, de forma análoga, llegamos (usando $\hat{e}_\theta \cdot \hat{k} = \mathrm{sen}\,\theta$, $\hat{e}_r \cdot \hat{k} = -\cos\theta$,$\hat{e}_\varphi \cdot \hat{k} = 0$) a

$$\boxed{\ddot{\varphi}\left(1 + 3\,\mathrm{sen}^2\theta\right) = -6\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta} \tag{3.3}$$

Observación: La ecuación (3) es equivalente a plantear $L_z =$ cte. ($\dot{L}_z = 0$). Para ver esto, en la ecuación (3) separamos las variables angulares e integramos en t:

$$\int \frac{d\dot{\varphi}}{dt}\frac{1}{\dot{\varphi}}dt = -6\int \frac{d\theta}{dt}\frac{\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{1 + 3\,\mathrm{sen}^2\theta}dt$$

Para integrar el lado derecho usamos el cambio de variable $u = 1 + 3\,\mathrm{sen}^2\theta$. El diferencial es $du = 6\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta d\theta$, y, sustituyendo, conseguimos la ecuación

$$\int \frac{d\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}} = -\int \frac{du}{u} \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}_0} = \ln\frac{u_0}{u} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}u = \dot{\varphi}_0 u_0$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\dot{\varphi}\left(1 + 3\,\mathrm{sen}^2\theta\right) = \text{cte.} = \frac{12}{ma^2}L_z} = \dot{\varphi}_0\left(1 + 3\,\mathrm{sen}^2\theta_0\right)$$

Entonces tenemos dos ecuaciones (ecuación (2) y la preintegral de la ecuación (3)), que reescritas quedan

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}{6}\dot{\varphi}^2 - \dfrac{5}{6}\ddot{\theta} = \dfrac{g}{a}\mathrm{sen}\,\theta \\ \\ \dot{\varphi}\left(1 + 3\,\mathrm{sen}^2\theta\right) = \dot{\varphi}_0\left(1 + 3\,\mathrm{sen}^2\theta_0\right) \end{cases}$$

siendo $\dot{\varphi}_0$ y θ_0 condiciones iniciales (no especificadas). Podemos cancelar $\dot{\varphi}$ entre estas ecuaciones, obteniendo así la ecuación de movimiento:

$$\boxed{\left[\frac{\left(1 + 3\,\mathrm{sen}^2\theta_0\right)}{1 + 3\,\mathrm{sen}^2\theta}\dot{\varphi}_0\right]^2 \frac{\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}{2} - \frac{5}{6}\ddot{\theta} = \frac{g}{a}\mathrm{sen}\,\theta}$$

(c) Segunda alternativa: Usando la ecuación de movimiento, imponemos $\theta = \theta_0 = \pi/3$; $\ddot{\theta} = 0$. Entonces,

$$\frac{\cancel{\operatorname{sen}\theta_0}\cos\theta_0}{2}\dot{\varphi}_0^2 = \frac{g}{a}\cancel{\operatorname{sen}\theta_0} \quad \to \quad \dot{\varphi}^2 = \frac{2}{\cos\theta_0}\frac{g}{a} = 4\frac{g}{a} \quad \to \quad \boxed{\dot{\varphi}_0 = 2\sqrt{\frac{g}{a}}}$$