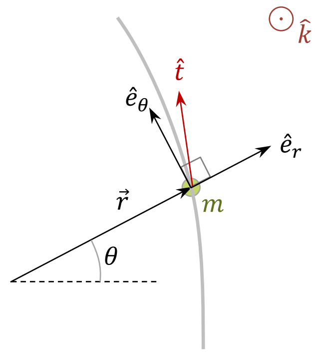
Mecánica Newtoniana - Examen 18/12/2021 - Solución

Ejercicio 1



(a) $r(\theta) = r_0 + h\theta$

$$\left.\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \\ \dot{r} &= h\dot{\theta}\end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{\vec{v} = h\dot{\theta}\hat{e}_r + (r_0 + h\theta)\dot{\theta}\hat{e}_\theta}$$

i) Ecuación de movimiento usando energía:

Sistema conservativo $\Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \text{cte.}$

$$\rightarrow v^2 = \dot{r}^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2 = \text{cte.}$$

$$h^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = v_0^2$$

$$\dot{\theta}^2(h^2 + r^2) = \dot{\theta}^2(h^2 + (r_0 + h\theta)^2) = v_0^2$$

$$\boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{h^2 + (r_0 + h\theta)^2}}$$

ii) Ecuación de movimiento usando cardinales:

Aceleración: $\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{e}_\theta$, con $\ddot{r} = h\ddot{\theta}$

Como la guía es lisa, la fuerza neta tiene componente nula en la dirección tangencial.

Vector tangente (asumiendo $\dot{\theta} > 0$): $\hat{t} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{h^2+r^2}}(h\hat{e}_r + r\hat{e}_\theta)$

Primera cardinal proyectada en la dirección tangencial:

$$\vec{R}^{ext} \cdot \hat{t} = m\vec{a} \cdot \hat{t} = 0$$

(equivale a usar que la potencia de las fuerzas reactivas $\mathcal{P} = \vec{R}^{ext} \cdot \vec{v}$ es nula).

$$\frac{m}{\sqrt{h^2 + r^2}}\left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{e}_\theta\right] \cdot (h\hat{e}_r + r\hat{e}_\theta) = 0$$

$$\leftrightarrow h\left(h\ddot{\theta} - r\dot{\theta}^2\right) + r\left(2h\dot{\theta}^2 + r\ddot{\theta}\right) = 0 \leftrightarrow (h^2 + r^2)\ddot{\theta} + hr\dot{\theta}^2 = 0$$

$$\leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{hr}{h^2 + r^2}\dot{\theta}^2 = -\frac{h(r_0 + h\theta)v_0^2}{(h^2 + (r_0 + h\theta)^2)^2}}$$

El resultado encontrado en (ii) equivale al hallado en (i) ya que, al derivar este, se encuentra

$$\frac{d\left(\dot{\theta}^2\right)}{dt} = [2\dot{\theta}]\ddot{\theta} = -[2\dot{\theta}]\frac{h(r_0 + h\theta)v_0^2}{(h^2 + (r_0 + h\theta)^2)^2}$$

(b) Si $\vec{R}$ es la fuerza de reacción de la guía, entonces

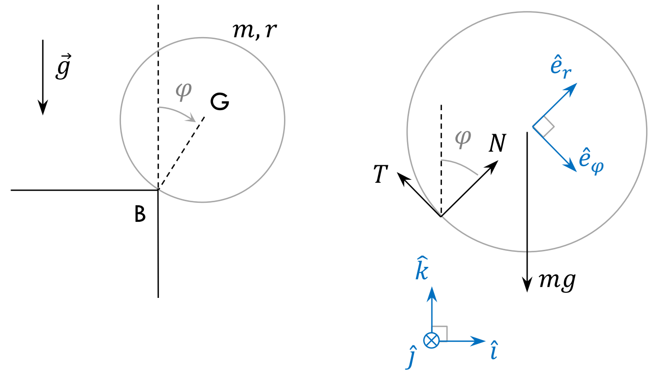
$$\vec{R} = m\vec{a} = m\left[-\frac{h^2v_0^2(r_0 + h\theta)}{(h^2 + (r_0 + h\theta)^2)^2} - \frac{v_0^2(r_0 + h\theta)}{h^2 + (r_0 + h\theta)^2}\right]\hat{e}_r + m\left[\frac{2hv_0^2}{h^2 + (r_0 + h\theta)^2} - \frac{hv_0^2(r_0 + h\theta)^2}{(h^2 + (r_0 + h\theta)^2)^2}\right]\hat{e}_\theta$$

Factorizando el resultado:

$$\boxed{\vec{R} = mv_0^2\frac{[2h^2 + (r_0 + h\theta)^2]}{[h^2 + (r_0 + h\theta)^2]^2}\{-(r_0 + h\theta)\hat{e}_r + h\hat{e}_\theta\}}$$

La reacción tiene la dirección del vector normal $\vec{R} = R\hat{n}$ ($\hat{n} = \hat{t} \wedge \hat{k}$).

Ejercicio 2



(a) Se asume que no hay deslizamiento. El punto de contacto del disco con el punto B de la superficie tiene velocidad nula, y el disco realiza una rotación pura alrededor de B.

$$I_G = \frac{mr^2}{2} \rightarrow I_B = \frac{mr^2}{2} + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$$

$$\vec{L}_B = I_B\vec{\omega} = \frac{3mr^2}{2}\dot{\varphi}\hat{\jmath}$$

$$\dot{\vec{L}}_B = \frac{3mr^2}{2}\ddot{\varphi}\hat{\jmath} = \vec{M}_B^{ext} = mgr\sin\varphi\,\hat{\jmath}$$

$$\rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} - \frac{2g}{3r}\sin\varphi = 0}$$

(b) Determinamos las fuerzas de reacción bajo la hipótesis de que no hay deslizamiento.

$$\vec{a}_G = r\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\hat{e}_r$$

$$m\vec{a}_G = N\hat{e}_r - T\hat{e}_\varphi - mg\hat{k}$$

$$\begin{cases} m\vec{a}_G\cdot\hat{e}_r = -mr\dot{\varphi}^2 = N - mg\cos\varphi \\ m\vec{a}_G\cdot\hat{e}_\varphi = mr\ddot{\varphi} = -T + mg\sin\varphi \end{cases}$$

Preintegramos la ecuación de movimiento:

$$\ddot{\varphi}\dot{\varphi} = \frac{2g}{3r}\sin\varphi\,\dot{\varphi} \rightarrow \int \ddot{\varphi}\dot{\varphi}\mathrm{d}t = \int \dot{\varphi}\mathrm{d}\dot{\varphi} = \frac{2g}{3r}\int \sin\varphi\,\dot{\varphi}\mathrm{d}t = \frac{2g}{3r}\int \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{\dot{\varphi}_0^2}{2} = \frac{2g}{3r}(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)$$

Usando las condiciones iniciales $\varphi_0 = 0$ y $\dot{\varphi}_0 = v_0/r$, queda

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{4g}{3r}(1-\cos\varphi) + \dot{\varphi}_0^2$$

Despejamos la fuerza normal y la fuerza de rozamiento estático:

$$N = mg\cos\varphi - mr\left[\frac{4g}{3r}(1-\cos\varphi) + \frac{v_0^2}{r^2}\right] = mg\left(\frac{7}{3}\cos\varphi - \frac{4}{3}\right) - \frac{mv_0^2}{r}$$

$$T = mg\sin\varphi - mr\left(\frac{2g}{3r}\sin\varphi\right) = \frac{mg}{3}\sin\varphi$$

Para que no haya desprendimiento se debe cumplir $N > 0$. Esta condición restringe los valores de v_0, pero el estudio de esta condición no es de interés para este ejercicio (se asume que no hay desprendimiento.

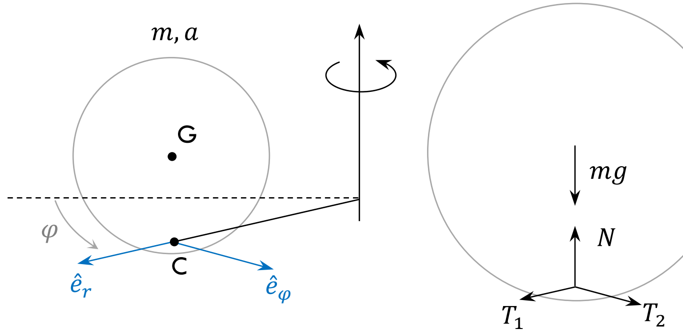
La condición de no deslizamiento se cumple solo si $|T| \leq \mu_s|N|$. La posición donde comienza a deslizar satisface $|T| = \mu_s|N|$. Sustituyendo:

$$\frac{mg}{3}\sin\varphi = \mu_s\left[mg\left(\frac{7}{3}\cos\varphi - \frac{4}{3}\right) - \frac{mv_0^2}{r}\right]$$

$$\leftrightarrow \boxed{\sin\varphi = \mu_s(7\cos\varphi - 4) - \frac{3\mu_s v_0^2}{gr}}$$

Mecánica Newtoniana - Examen 18/12/2021 - Solución

Ejercicio 3



(a) $\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_r + \omega_2 \vec{e}_\varphi + \omega_3 \vec{k}$

El punto del plano en contacto con la esfera tiene velocidad $\vec{v}_p = r\Omega \vec{e}_\varphi$.

El punto de la esfera en contacto con el plano tiene velocidad

$$\vec{v}_c = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \left(-a\vec{k}\right) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + a\omega_1 \vec{e}_\varphi - a\omega_2 \vec{e}_r$$

Rueda sin deslizar: $\vec{v}_p = \vec{v}_c \leftrightarrow \; r\Omega \vec{e}_\varphi = (\dot{r} - a\omega_2)\vec{e}_r + (r\dot{\varphi} + a\omega_1)\vec{e}_\varphi$

$$\begin{cases} \dot{r} = a\omega_2 \\ r\Omega = r\dot{\varphi} + a\omega_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \omega_2 = \dfrac{\dot{r}}{a} \\ \omega_1 = \dfrac{r}{a}(\Omega - \dot{\varphi}) \end{cases}$$

(b)

Primera cardinal:

$$m\vec{a}_G = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi = T_1 \vec{e}_r + T_2 \vec{e}_\varphi + (N - mg)\vec{k} \qquad (1)$$

Segunda cardinal:

El momento angular respecto a G es $\vec{L}_G = \mathbb{I}_G \vec{\omega} = \frac{2}{5} m a^2 \vec{\omega}$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \frac{2}{5} m a^2 \left(\dot{\omega}_1 \vec{e}_r + \dot{\omega}_2 \vec{e}_\varphi + \dot{\omega}_3 \vec{k} + \omega_1 \dot{\vec{e}}_r + \omega_2 \dot{\vec{e}}_\varphi + \omega_3 \dot{\vec{k}}\right)$$

$$= \frac{2}{5} m a^2 \left((\dot{\omega}_1 - \dot{\varphi}\omega_2)\vec{e}_r + (\dot{\omega}_2 + \dot{\varphi}\omega_1)\vec{e}_\varphi + \dot{\omega}_3 \vec{k}\right)$$

$$= \frac{2}{5} m a^2 \left(\left(\frac{\dot{r}}{a}(\Omega - \dot{\varphi}) - \frac{r}{a}\ddot{\varphi} - \frac{\dot{r}\dot{\varphi}}{a}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\ddot{r}}{a} + \frac{\dot{\varphi} r}{a}(\Omega - \dot{\varphi})\right)\vec{e}_\varphi + \dot{\omega}_3 \vec{k}\right)$$

$$= \vec{M}_G^{ext} = aT_2 \vec{e}_r - aT_1 \vec{e}_\varphi$$

$$\begin{cases} \frac{2}{5} m(\dot{r}\Omega - r\ddot{\varphi} - 2\dot{r}\dot{\varphi}) = T_2 \\ \frac{2}{5} m(\ddot{r} + r\dot{\varphi}(\Omega - \dot{\varphi})) = -T_1 \end{cases} \qquad (2)$$

Combinamos (1)+(2) para obtener las ecuaciones de movimiento (eliminando T_1 y T_2):

$$\begin{cases} \dfrac{2}{5} m(\dot{r}\Omega - r\ddot{\varphi} - 2\dot{r}\dot{\varphi}) = m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \\ \dfrac{2}{5} m(\ddot{r} + r\dot{\varphi}(\Omega - \dot{\varphi})) = -m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) \end{cases}$$

Ecuaciones de movimiento:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{7}{5}(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) - \dfrac{2}{5}\dot{r}\Omega = 0 \\ \dfrac{7}{5}(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) + \dfrac{2}{5} r\dot{\varphi}\Omega = 0 \end{cases}}$$

Soluciones con $r(t) = r_0 = \text{cte.}$: Las ecuaciones de movimiento se reducen en este caso a

$$\begin{cases} r_0 \ddot{\varphi} = 0 \\ -7r\dot{\varphi}^2 + 2r\dot{\varphi}\Omega = 0 \end{cases}$$

La primera relación implica $\dot{\varphi}(t) = \text{cte.} = \dot{\varphi}(0)$.

i) Una solución de la segunda relación es $\dot{\varphi}(t) = 0 \; \leftrightarrow \varphi(t) = \text{cte}$. En esta solución el centro de la esfera permanece estacionario en el espacio.

ii) La otra solución cumple $-7r\dot{\varphi} + 2r\Omega = 0 \leftrightarrow \dot{\varphi}(t) = \frac{2}{7}\Omega$. En esta solución el centro de la esfera realiza un movimiento circular uniforme, con velocidad angular $\frac{2}{7}\Omega$.