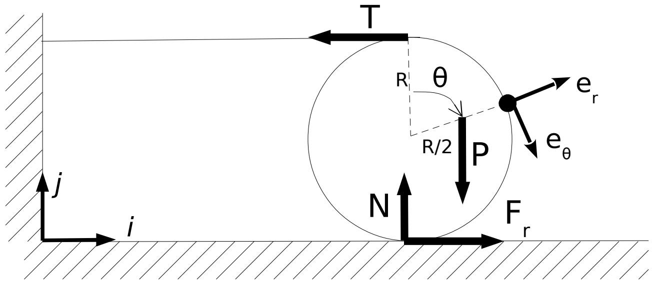
Solución del Ejercicio 1.



a) Sean $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta$ los versores móviles de la figura, y sean $\hat{i}, \hat{j}$ los versores fijos horizontal y vertical, respectivamente. El centro de masa del sistema formado por el disco y la masa se encuentra en el punto medio de la línea que une el centro del disco con masa puntual incrustada en su periferia, a una distancia $R/2$ del mismo. Sobre el sistema actúan las cuatro fuerzas de la figura, la tensión de la cuerda $\vec{T}$, la normal con el piso $\vec{N}$, la fuerza de rozamiento con el piso $\vec{F}_r$, y el peso del conjunto $\vec{P}$. Aplicando la primera cardinal, para el caso del sistema en equilibrio tenemos:

$$\hat{i})\, F_r - T = 0$$
$$\hat{j})\, N - 2mg = 0$$

Aplicando la segunda cardinal al punto de contacto del piso con el disco tenemos: $2\left(\frac{R}{2}\right)mg\sin\theta - 2RT = 0$.

Entonces, calculando las fuerzas aplicadas sobre el sistema, obtenemos:

$$T = F_r = \frac{mg}{2}\sin\theta$$
$$N = 2mg$$

Pero para que se mantenga el sistema en equilibrio debemos tener $|\vec{F}_r| \le f|\vec{N}|$, y $T \ge 0$, por lo tanto, la condición de equilibrio queda como:

$$0 \le \frac{mg}{2}\sin\theta \le \frac{1}{8}(2mg) \rightarrow 0 \le \sin\theta \le \frac{1}{2}.$$

Es decir que los ángulos θ inciales para los que habrá equilibrio serán los que estén comprendidos entre $0 \le \theta \le \frac{\pi}{6}$, y $\frac{5\pi}{6} \le \theta \le \pi$.

b) Sea x la distancia horizontal medida desde la pared al centro del disco. Y sea θ el ángulo la de la figura. Observar que θ es tanto el ángulo con la vertical que forma la recta que une el centro del disco con la masa incrustada, como el ángulo de giro del disco. Como la longitud del hilo es fija, debemos tener $x + R\theta = \text{cte.} \rightarrow \dot{x} = -R\dot{\theta}, \ddot{x} = -R\ddot{\theta}$.

La posición del centro de masas del sistema se calcula como:

$$\vec{r}_G = x\vec{i} + R\vec{j} + \frac{R}{2}\hat{e}_r$$

Derivando obtenemos la velocidad del centro de masas del sistema G:

$$\vec{v}_G = \dot{x}\vec{i} + \frac{R}{2}\dot{\theta}\hat{e}_\theta.$$

Derivando nuevamente podemos calcular la aceleración de G:

$$\vec{a}_G = \ddot{x}\vec{i} - \frac{R}{2}\dot{\theta}^2\hat{e}_r + \frac{R}{2}\ddot{\theta}\hat{e}_\theta$$

Las fuerzas que actúan sobre el sistema son las mismas del dibujo de la parte

anterior. Observar que ahora la fuerza de rozamiento será dinámica, por lo cuál $|\vec{F}_r|=f|\vec{N}|$, y la dirección de la fuerza de rozamiento será la de la figura, ya que al crecer θ, el hilo se va enroscando en el disco, y como la longitud del mismo es fija, *x* deberá disminuir, por lo cual la dirección de traslación en *x* cuando θ avance en sentido horario será hacia la izquierda, por lo cual la fuerza de rozamiento dinámica debe apuntar hacia la derecha, oponiéndose a ambos movimientos.
Utilizando la ecuación de vínculo y evaluando en la condición inicial ($\theta=\pi/2$ y $\dot{\theta}=0$) la primera cardinal del sistema queda como:

$$\hat{e}_r)\ -2mR\ddot{\theta}=\frac{1}{8}N-T$$

$$\hat{e}_\theta)\ mR\ddot{\theta}=2mg-N$$

Aplicando Steiner para el disco, el momento de inercia del disco respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento que pase por el centro de masas del sistema es $I_G^{disco}=\frac{mR^2}{2}+m\left(\frac{R}{2}\right)^2=\frac{3mR^2}{4}$. Para la masita puntual incrustada, el momento de inercia respecto al mismo eje es $I_G^{masita}=m\left(\frac{R}{2}\right)^2=\frac{mR^2}{4}$. Luego el momento de inercia total del sistema respecto al eje perpendicular a la hoja que pasa por G será $I_G=I_G^{disco}+I_G^{masita}=\frac{3mR^2}{4}+\frac{mR^2}{4}=mR^2$.
La segunda cardinal del sistema respecto a G (evaluada en el instante inicial) queda como:

$$mR^2\ddot{\theta}=-RT+\frac{R}{2}N-\frac{R}{8}N$$

Entonces tengo que resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

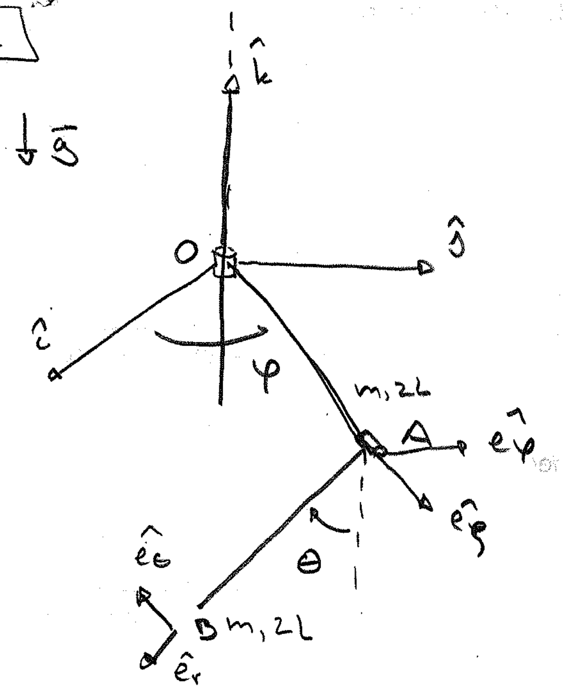
$$-2mR\ddot{\theta}=\frac{1}{8}N-T$$

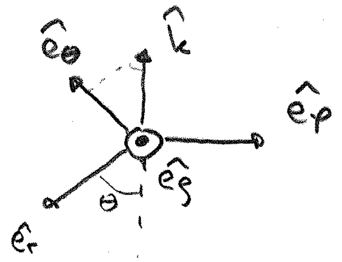
$$mR\ddot{\theta}=2mg-N$$

$$mR^2\ddot{\theta}=-RT+\frac{3R}{8}N$$

Obtenemos $\ddot{\theta}=\frac{2g}{13R}$.
Entonces, sustituyendo el valor de $\ddot{\theta}$ y las condiciones iniciales, obtenemos que la aceleración del centro de masas en ese instante es
$\vec{a}_G=-\frac{2g}{13}\hat{e}_r+\frac{g}{13}\hat{e}_\theta=-\frac{2g}{13}\hat{i}-\frac{g}{13}\hat{j}$.

2





$$\hat{e}_r = -\cos\theta\,\hat{k} - \sin\theta\,\hat{e}_\rho$$

$$\hat{k} = -\cos\theta\,\hat{e}_r + \sin\theta\,\hat{e}_\theta$$

$$\hat{e}_\theta = \sin\theta\,\hat{k} - \cos\theta\,\hat{e}_\rho$$

a) Desde O la única fuerza externa al sistema de barras es el peso.

$$\vec{M}_O^{(ext)} = \vec{r}_G \wedge (-2mg\hat{k}) \Rightarrow \vec{M}_O^{(ext)} \cdot \hat{k} = 0 \Rightarrow \vec{L}_O \cdot \hat{k} = cte.$$

Dado que el sistema tiene en O y A dos articulaciones cilíndricas lisas y la única fuerza (con potencia no nula) es el peso, el sistema es conservativo.

b) $\vec{L}_O^T = \vec{L}_O^{OA} + \vec{L}_O^{AB}$

$$\vec{L}_O^{OA} = \mathbb{I}_O^{OA}\,\vec{\omega}^{OA}$$

$$\mathbb{I}_O^{OA} = \frac{4}{3}mL^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ en la base $\{\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{k}\}$

$$\vec{\omega}^{OA} = \dot{\varphi}\,\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{L}_O^{OA} = \frac{4}{3}mL^2\dot{\varphi}\,\hat{k}}$$

$$\vec{L}_O^{AB} = \vec{L}_A^{AB} + \vec{P} \wedge (\vec{r}_O - \vec{r}_A)$$

$$\vec{L}_A^{AB} = m(\vec{r}_G^{AB} - \vec{r}_A)\wedge \vec{v}_A + \mathbb{I}_A^{AB}\,\vec{\omega}^{AB}$$

$$\vec{r}_A = 2L\,\hat{e}_\rho$$

$$\vec{r}_G^{AB} = 2L\,\hat{e}_\rho + L\,\hat{e}_r = \vec{r}_A + L\,\hat{e}_r$$

$$\vec{v}_A = 2L\,\dot{\hat{e}}_\rho = 2L\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi \qquad \dot{\hat{e}}_\rho = \dot{\varphi}\,\hat{k}\wedge\hat{e}_\rho = \dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi$$

$$\dot{\hat{e}}_\varphi = \dot{\varphi}\,\hat{k}\wedge\hat{e}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\hat{e}_\rho$$

$$m(\vec{r}_G^{AB} - \vec{r}_A)\wedge\vec{v}_A = mL\,\hat{e}_r\wedge 2L\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi$$

$$= 2mL^2\dot{\varphi}\cos\theta\,\hat{e}_\rho$$

$$\vec{\omega}^{AB} = \dot{\varphi}\,\hat{k} - \dot{\theta}\,\hat{e}_\rho = -\dot{\varphi}\cos\theta\,\hat{e}_r + \dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{e}_\theta - \dot{\theta}\,\hat{e}_\rho$$

$$\mathbb{I}_A^{AB} = \frac{4}{3}mL^2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \text{en la base } \{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\rho\}$$

$$\mathbb{I}_A^{AB}\,\vec{\omega}_{AB} = \frac{4}{3}mL^2\left(\dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{e}_\theta - \dot{\theta}\,\hat{e}_\rho\right)$$

$$\vec{L}_A^{AB} = \left(2mL^2\dot{\varphi}\cos\theta - \frac{4}{3}mL^2\dot{\theta}\right)\hat{e}_\rho + \frac{4}{3}mL^2\dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{e}_\theta$$

$$\vec{v}_G^{AB} = 2L\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi + L\,\dot{\hat{e}}_r \qquad \dot{\hat{e}}_r = (-\dot{\varphi}\cos\theta\,\hat{e}_r + \dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{e}_\theta - \dot{\theta}\,\hat{e}_\rho)\wedge\hat{e}_r$$

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{e}_\rho + \dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$$

$$\vec{v}_G^{AB} = 2L\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi + L\dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{e}_\rho + L\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$$

$$\vec{P} = m\,\vec{v}_G^{AB} = 2mL\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi + mL\dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{e}_\rho + mL\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$$

$$(\vec{r}_O - \vec{r}_A) = -2L\,\hat{e}_\rho$$

$$\vec{P}\wedge(\vec{r}_O - \vec{r}_A) = 4mL^2\dot{\varphi}\,\hat{k} + 2mL^2\dot{\theta}\,\hat{e}_r$$

$$\vec{L}_O^{AB} = \left(2mL^2\dot{\varphi}\cos\theta - \frac{4}{3}mL^2\dot{\theta}\right)\hat{e}_\rho + \frac{4}{3}mL^2\dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{e}_\theta + 4mL^2\dot{\varphi}\,\hat{k} + 2mL^2\dot{\theta}\,\hat{e}_r$$

$$\vec{L}_O^{T} = \left(2mL^2\dot{\varphi}\cos\theta - \frac{4}{3}mL^2\dot{\theta}\right)\hat{e}_\rho + \frac{4}{3}mL^2\dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{e}_\theta + 2mL^2\dot{\theta}\,\hat{e}_r + 4mL^2\dot{\varphi}\left(\frac{1}{3}+1\right)\hat{k}$$

$$\vec{L}_o^T \cdot \hat{k} = \frac{4}{3} mL^2 \dot{\varphi} \sin^2\theta - 2mL^2 \dot{\theta} \cos\theta + \frac{16}{3} mL^2 \dot{\varphi} = \ell \text{ cte} \quad (1)$$

$\hat{e}_\varphi \cdot \hat{k} = 0$

$\hat{e}_\theta \cdot \hat{k} = \sin\theta$

$\hat{e}_r \cdot \hat{k} = -\cos\theta$

$$T = T^{AB} + T^{OA}$$

$$T^{OA} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^{OA} \mathbb{I}_o^{OA} \vec{\omega}^{OA} = \frac{2}{3} mL^2 \dot{\varphi}^2$$

$$T^{AB} = \frac{1}{2} m \vec{v}_A^{\,2} + m \vec{v}_A \cdot [\vec{\omega}^{AB} \wedge (\vec{r}_G^{AB} - \vec{r}_A)] + \frac{1}{2} \vec{\omega}^{AB} \mathbb{I}_A^{AB} \vec{\omega}^{AB}$$

$$\vec{v}_A^{\,2} = 4L^2 \dot{\varphi}^2$$

$$m \vec{v}_A \cdot [\underbrace{(\dot{\varphi}\hat{k} - \dot{\theta}\hat{e}_\varphi) \wedge L\hat{e}_r}_{L\vec{\omega}^{AB} \wedge \hat{e}_r = L\dot{\hat{e}}_r}] = m 2L\dot{\varphi}\, \hat{e}_\varphi \cdot [L(\dot{\varphi}\sin\theta\, \hat{e}_\varphi + \dot{\theta}\, \hat{e}_\theta)]$$

$$= -2mL^2 \dot{\varphi}\, \dot{\theta} \cos\theta$$

$$\frac{1}{2} \vec{\omega}^{AB} \mathbb{I}_A^{AB} \vec{\omega}^{AB} = \frac{2}{3} mL^2 (\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2)$$

$$T^{AB} = 2mL^2 \dot{\varphi}^2 - 2mL^2 \dot{\varphi}\, \dot{\theta} \cos\theta + \frac{2}{3} mL^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \frac{2}{3} mL^2 \dot{\theta}^2$$

$$T^T = 2mL^2 \dot{\varphi}^2 \left[\frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3}\sin^2\theta \right] + \frac{2}{3} mL^2 \dot{\theta}^2 - 2mL^2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos\theta$$

c) $U_g = -mgL\cos\theta$

$$E_o = T + U = \frac{2}{3} mL^2 \dot{\varphi}^2 [4 + \sin^2\theta] + \frac{2}{3} mL^2 \dot{\theta}^2 - 2mL^2 \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta - mgL\cos\theta \quad (2)$$

C.I. $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ $\quad \dot{\varphi}_0 = 0 = \dot{\theta}_0$

$\Rightarrow \ell = 0$

$E_o = 0$

Cuando AB vertical: $\theta_f = 0$

evaluando (1) y (2) en $\theta = \theta_f = 0$ y usando $\ell = E_0 = 0$

$$-2mL^2\dot{\theta}_f + \frac{16}{3} mL^2 \dot{\varphi}_f = 0$$

$$\frac{8}{3} mL^2 \dot{\varphi}_f^2 + \frac{2}{3} mL^2 \dot{\theta}_f^2 - 2mL^2 \dot{\theta}_f \dot{\varphi}_f - mgL = 0$$

$$\dot{\theta}_f = \frac{8}{3}\dot{\varphi}_f$$

$$\frac{8}{3}\dot{\varphi}_f^2 + \frac{2}{3}\frac{64}{9}\dot{\varphi}_f^2 - \frac{16}{3}\dot{\varphi}_f^2 = g/L$$

$$\frac{128}{9}\dot{\varphi}_f^2 - 8\dot{\varphi}_f^2 = \frac{3g}{L} \rightarrow \boxed{\dot{\varphi}_f^2 = \frac{27}{56}\frac{g}{L}}$$