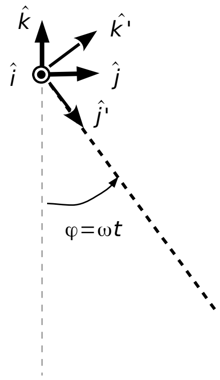
Solución del Ejercicio 1

a)



Definimos versores $\hat{j}'$ y $\hat{k}'$, de manera que el sistema *S*' $(O,\hat{i},\hat{j}',\hat{k}')$ es solidario a la placa, que gira con velocidad angular constante $\vec{\omega}=\omega\hat{i}$. En función de los vectores del sistema inercial *S* $(O,\hat{i},\hat{j},\hat{k})$, tenemos: $\hat{j}'=-\cos(\omega t)\hat{k}+\sin(\omega t)\hat{j}$ y $\hat{k}'=\sin(\omega t)\hat{k}+\cos(\omega t)\hat{j}$. Sea la *x* la posición horizontal de la partícula en la placa medida desde O en la dirección de $\hat{i}$, y sea *y* la coordenada de la partícula sobre la placa en la dirección del versor $\hat{j}'$.

El vector posición en el sistema *S*' se escribe como $\vec{r}'=\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}'$.

i) La velocidad relativa de la partícula (en *S*') sobre la placa será $\vec{v}'=\dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}'$, mientras que la aceleración relativa de la partícula será $\vec{a}'=\ddot{x}\hat{i}+\ddot{y}\hat{j}'$.

ii) Para la velocidad absoluta, aplicamos Roverbal a los sistemas *S* y *S*'.

$$\vec{v}=\vec{v}'+\vec{\omega}\times\vec{r}=\dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}'+\omega\hat{i}\times\left(x\hat{i}+y\hat{j}'\right)=\dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}'+\omega y\hat{k}'.$$

Para la aceleración absoluta, aplicamos Roverbal y Coriolis:

$$\vec{a}=\vec{a}'+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})+2\vec{\omega}\times\vec{v}'=\ddot{x}\hat{i}+\ddot{y}\hat{j}'+\omega\hat{i}\times\left(\omega y\hat{k}'\right)+2\omega\hat{i}\times\left(\dot{x}\hat{i}+\dot{y}\hat{j}'\right).$$

$$\vec{a}=\ddot{x}\hat{i}+\ddot{y}\hat{j}'-\omega^2 y\hat{j}'+2\omega\dot{y}\hat{k}'=\ddot{x}\hat{i}+\left(\ddot{y}-\omega^2 y\right)\hat{j}'+2\omega\dot{y}\hat{k}'$$

b) Las fuerzas que actúan sobre la masa *m* son el peso $\vec{P}=-mg\hat{k}=mg\cos(\omega t)\hat{j}'-mg\sin(\omega t)\hat{k}'$, y la normal $\vec{N}=N\hat{k}'$. Por lo tanto, aplicando la segunda ley de Newton tenemos:

$$m\ddot{x}=0$$
$$m(\ddot{y}-\omega^2 y)=mg\cos(\omega t)$$
$$2m\omega\dot{y}=N-mg\sin(\omega t)$$

Siendo las condiciones iniciales $x(0)=y(0)=\dot{y}(0)=0$, y $\dot{x}(0)=v_0$.

A partir de la primer ecuación tenemos $x(t)=v_0 t$.

La segunda ecuación es una ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogénea.

La ecuación homogénea correspondiente, $m(\ddot{y}_H-\omega^2 y_H)=0$, tiene soluciones de la forma $y_H=A\sinh(\omega t)+B\cosh(\omega t)$, con *A* y *B* constantes a ajustar según las condiciones iniciales. Para la solución particular, probamos con $y_P=C\cos(\omega t)$.

Substituyendo en la ecuación completa, obtenemos:

$-2m\omega^2 C\cos(\omega t)=mg\cos(\omega t)$, por lo tanto $C=-\dfrac{g}{2\omega^2}$. Entonces, la solución completa es $y=A\sinh(\omega t)+B\cosh(\omega t)-\dfrac{g}{2\omega^2}\cos(\omega t)$, y su derivada $\dot{y}=\omega A\cosh(\omega t)+\omega B\sinh(\omega t)+\dfrac{g}{2\omega}\sin(\omega t)$. Evaluando en las codiciones iniciales tenemos: $B=\dfrac{g}{2\omega^2}$, $A=0$. Luego, las leyes horarias son:

$$x(t)=v_0 t$$
$$y(t)=\frac{g}{2\omega^2}\left[\cosh(\omega t)-\cos(\omega t)\right].$$

c) Cuando $\varphi=\omega t=\pi$, la distancia y al eje de giro será dada por $y\left(t=\frac{\pi}{\omega}\right)=\frac{g}{2\omega^2}\left[\cosh(\pi)+1\right]$. En ese instante, la velocidad absoluta será $\vec{v}=\dot{x}\,\hat{i}+\dot{y}\,\hat{j}\,'+\omega\, y\,\hat{k}\,'=v_0\,\hat{i}+\frac{g}{2\omega}\sinh(\pi)\,\hat{j}\,'+\frac{g}{2\omega}\left[\cosh(\pi)+1\right]\hat{k}\,'$.

d) La energía potencial gravitatoria de la partícula está dada por $U=mgh$, donde h es la altura de la partícula, medida desde O. Para nuestro caso $U=mgh=-mgy\cos(\omega t)$. Luego, el trabajo del peso entre la posición inicial (y=0) y la posición final (es la distancia y calculada en la parte anterior) se calcula como: $W_{peso}=-\Delta U=-\left[\frac{mg^2}{2\omega^2}(\cosh(\pi)+1)-0\right]=-\frac{mg^2}{2\omega^2}(\cosh(\pi)+1)$.

Por el Teorema del Trabajo y la energía, sabemos que $\Delta K=W_{peso}+W_{normal}$, donde ΔK es la variación de la energía cinética. Calculamos

$$\Delta K=\frac{mv_0^2}{2}+\frac{mg^2}{8\omega^2}\sinh^2(\pi)+\frac{mg^2}{8\omega^2}\left[\cosh(\pi)+1\right]^2-\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mg^2}{8\omega^2}\sinh^2(\pi)+\frac{mg^2}{8\omega^2}\left[\cosh(\pi)+1\right]^2.$$

Luego, el trabajo de la normal será:

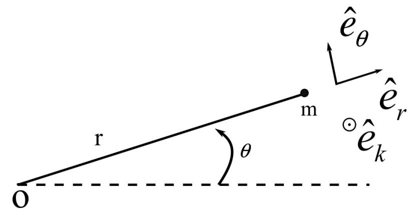
$$W_{normal}=\frac{mg^2}{8\omega^2}\sinh^2(\pi)+\frac{mg^2}{8\omega^2}\left[\cosh(\pi)+1\right]^2+\frac{mg^2}{2\omega^2}\left[\cosh(\pi)+1\right].$$

Usando que $\cosh^2(\alpha)-\sinh^2(\alpha)=1$, y agrupando términos, tenemos:

$$W_{normal}=\frac{mg^2}{8\omega^2}\left[\cosh^2(\pi)-1+\cosh^2(\pi)+2\cosh(\pi)+1+4\cosh(\pi)+4\right]$$

$$W_{normal}=\frac{mg^2}{4\omega^2}\left[\cosh^2(\pi)+3\cosh(\pi)+2\right].$$

Problema 2



Para el sistema de coordenadas definido en la figura:

$$\vec{r} = r\hat{e}_r \tag{1}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \tag{2}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta \tag{3}$$

Y las condiciones iniciales $r(0) = r_0$, $\theta(0) = 0, \vec{v}(0) = v_0\hat{e}_\theta$

La única fuerza que actúa es originada por el hilo elástico por lo tanto $\vec{F} = -kr\hat{e}_r$, sabemos entonces que la partícula describe un movimiento central en el plano y se conserva la cantidad de movimiento angular respecto de O ($\vec{L}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v}$), esto nos permite obtener.

$$\dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2} = \frac{r_0 v_0}{r^2} \tag{4}$$

$$\ddot{r} = -\frac{k}{m}r + \frac{\ell^2}{mr^3} \tag{5}$$

que son las ecuaciones de movimiento de la partícula.

b) Pre-integrando la ecuación (5) y usando las condiciones iniciales:

$$\dot{r}^2 = v_0^2(1 - \frac{r_0^2}{r^2}) + \frac{k}{m}(r_0^2 - r^2) \tag{6}$$

c) Para que $R = r_0$ y la órbita sea circular desde el comienzo usando (5) $R^2 = \frac{mv_0^2}{k}$, la velocidad angular y el período de la órbita circular son: $\dot{\theta} = \frac{v_0}{R}$ y $T = \frac{2\pi R}{v_0}$.

d) Cuando $r_0^2 = \frac{mv_0^2}{k}$ tenemos un movimiento circular, por lo tanto no existen los extremos. Sin embargo para otros valores de r_0 y v_0, la ecuación (6) nos permite obtener los valores de r que anulan $\dot{r}$ ($\dot{r} = 0$), sean estos r_1 y r_2. Factorizando según $(r^2 - r_0^2)$ tenemos:

$$(v_0^2 - \frac{k}{m}r^2)(r^2 - r_0^2) = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} r_1 = r_0 \\ r_2^2 = \dfrac{mv_0^2}{k} \end{array}$$

Según los valores que tomen r_0 y v_0 (respecto de k y m) tendremos:

Caso	Mínimo	Máximo
$r_0^2 > \frac{mv_0^2}{k}$	r_2	r_1
$r_0^2 < \frac{mv_0^2}{k}$	r_1	r_2