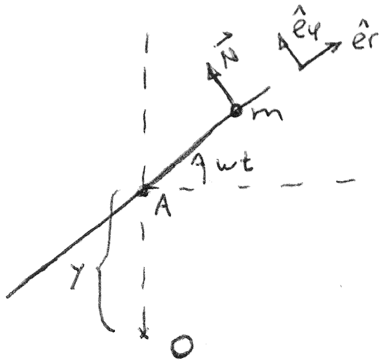
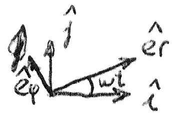
1)





$$\hat{j} = \cos\omega t \, . \, \hat{e}_\varphi + \operatorname{sen}\omega t \, . \, \hat{e}_r$$

a) $\vec{r} = y\,\hat{j} + r.\hat{e}_r \Rightarrow \vec{v} = \dot{y}\,\hat{j} + \dot{r}\,\hat{e}_r + r.\omega\,\hat{e}_\varphi$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{y}\,\hat{j} + (\ddot{r} - r\omega^2)\hat{e}_r + 2\dot{r}\omega.\hat{e}_\varphi$$
$$= (\ddot{r} - r\omega^2 + a.\operatorname{sen}\omega t)\hat{e}_r + (2\dot{r}\omega + a.\cos\omega t)\,\hat{e}_\varphi$$

La ecuación de Newton para la partícula queda:

$$m\ddot{\vec{r}} = N.\hat{e}_\varphi \Rightarrow \begin{cases} m[\ddot{r} - r\omega^2 + a.\operatorname{sen}\omega t] = 0 \\ [2\dot{r}\omega + a.\cos\omega t]\,m = N \end{cases}$$

Para hallar la ec del movimiento tomo la proyección de Newton según $\hat{e}_r$:

$$\boxed{\ddot{r} - r\omega^2 = -a.\operatorname{sen}\omega t}$$

Para hallar la ley horaria uso condiciones iniciales $r(0) = 0$, $\dot{r}(0) = \frac{a}{2\omega}$:

$r(t) = r_H(t) + r_P(t)$ || $r_P(t) = \frac{a}{2\omega^2}.\operatorname{sen}\omega t$ || $r_H(t) = A.\operatorname{senh}\omega t + B.\cosh\omega t$

$r(0) = \boxed{B = 0}$ || $\dot{r}(0) = \frac{a}{2\omega} + A.\omega = \frac{a}{2\omega} \Rightarrow \boxed{A = 0} \rightarrow \boxed{r(t) = \frac{a}{2\omega^2}.\operatorname{sen}\omega t}$

b) Para hallar N, proyecto Newton según $\hat{e}_\varphi$:

$$N = m[2\dot{r}\omega + a.\cos\omega t] = \boxed{2m.a.\cos\omega t}$$

c) Usando el teorema de la energía, el trabajo de las fuerzas sobre la partícula es igual a la variación de energía cinética:

$$W_N = \Delta T = \frac{m}{2}[V^2(t) - V^2(0)]$$

$$T = \frac{m}{2}[(r\omega + a.t.\cos\omega t)^2 + (\dot{r} + a.t.\operatorname{sen}\omega t)^2] = \frac{m}{2}[\dot{r}^2 + a^2t^2 + r^2\omega^2 + 2\omega.a.t.\cos\omega t.r + 2a.t.\operatorname{sen}\omega t.\dot{r}]$$

$$W_N = \frac{m}{2}\left[\cancel{\frac{a^2}{4\omega^2}\cos^2\omega t} + a^2t^2 + \cancel{\frac{a^2}{4\omega^2}\operatorname{sen}^2\omega t} + \frac{a^2}{\omega}.t.\operatorname{sen}\omega t.\cos\omega t + \frac{a^2}{\omega}.t.\operatorname{sen}\omega t.\cos\omega t - \cancel{\frac{a^2}{4\omega^2}}\right]$$

$$\boxed{W_N = m\left[\frac{a^2t^2}{2} + \frac{a^2}{\omega}.t.\operatorname{sen}\omega t.\cos\omega t\right]}$$

Ejercicio 2

a) $\vec{F} = -\frac{K}{r^3}\hat{e_r}$ que se puede escribir como $\vec{F} = -\nabla U$, siendo $U = -\frac{K}{2r^2}$

(como la fuerza proviene de un potencial , es conservativa)

b) Como la fuerza que actúa es central y conservativa se mantienen constantes $\vec{L_0}$ y E :

$\vec{L_0} = (P-O)\times\vec{P}$: $\dot{\vec{L_0}} = (\dot{P}-\dot{O})\times\vec{P} + (P-O)\times\dot{\vec{P}} = \vec{v}\times\vec{P} + (P-O)\times\vec{F} = 0$

$\dot{E} = \mathcal{P}^{(rel)}$ y como no tengo fuerzas no conservativas que trabajan $\Rightarrow \dot{E} = 0$

c) $E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + U(r)$

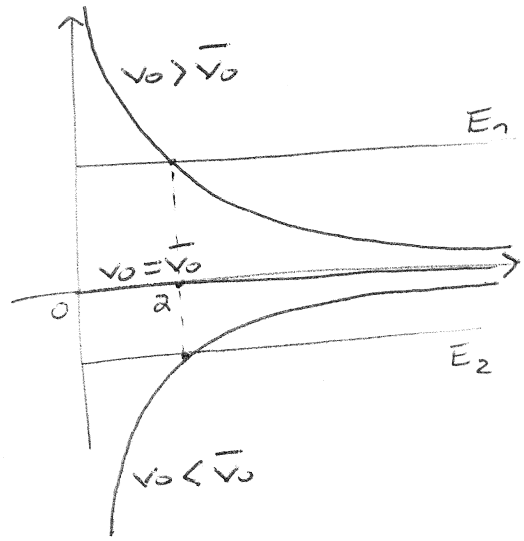
$\vec{v} = \dot{r}\hat{e_r} + r\dot{\theta}\hat{e_\theta}$

$\Rightarrow E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + U(r)$

Como $\vec{L_o}$ se conserva : $\ell = mr^2\dot{\theta}$ es constante : $mr^2\dot{\theta} = ma^2\frac{v_0}{a}$

$\Rightarrow E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{m(av_0)^2}{2r^2} + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{m(av_0)^2 - K}{2r^2}}_{U_{ef}(r)}$

siendo $E = \frac{m(av_0)^2 - K}{2a^2}$ de acuerdo a las condiciones iniciales



sea $\bar{v_0}$ / $m(a\bar{v_0})^2 - K = 0$

Para: $v_0 > \bar{v_0}$, $E_1 > 0$ y $r \geq a$

$v_0 = \bar{v_0}$, $E = 0$ y $r = a$

$v_0 < \bar{v_0}$, $E_2 < 0$ y $0 \leq r \leq a$

d) $-\frac{K}{r^3} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$ para un movimiento circular uniforme $\dot{r} = 0$, $\ddot{r} = 0$

$\Rightarrow -\frac{K}{r^3} = -mr\dot{\theta}^2 = -mr\frac{\ell^2}{m^2r^4}$

usando que $r(0) = a$, $(r\dot{\theta})(0) = v_0$ | $+K = m(av_0)^2 \Rightarrow v_0 = \bar{v_0}$

e) A partir de la ecuación de Binet para la aceleración radial:

$$a_r = -\frac{\ell^2}{m^2} u^2 (u+u'')$$

$$-\frac{K u^{\cancel{3}}}{\cancel{m}} = -\frac{\ell^2}{m^{\cancel{2}}} \cancel{u^2}(u+u'')$$

$$u'' + \Big(1 - \underbrace{\frac{K}{m(a v_0)^2}}_{>1 \ (v_0 < \bar{v}_0)}\Big) u = 0$$

Sea $-\alpha^2 = 1 - \dfrac{K}{m(a v_0)^2}$: $u'' - \alpha^2 u = 0 \Rightarrow u(\theta) = Ae^{\alpha\theta} + Be^{-\alpha\theta}$

$u(0) = a^{-1}$

$u'(0) = 0 \quad (\dot{r}(0) = 0)$

$A = B = \frac{1}{2} a^{-1}$

$$\Rightarrow u(\theta) = \frac{1}{2} a^{-1}\left(e^{\alpha\theta} + e^{-\alpha\theta}\right) = a^{-1}\,\mathrm{ch}(\alpha\theta)$$

$$\Rightarrow r(\theta) = \frac{a}{\mathrm{ch}(\alpha\theta)} \xrightarrow[(\theta\to\infty)]{} 0$$