Solución primer parcial 2007

Mecánica Newtoniana

Ejercicio 1

a) Usando que el estiramiento del resorte, r, verifica $\frac{r}{2} = R\cos\frac{\varphi}{2}$, la conservación de la energía mecánica del sistema se escribe como

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}k\left(2R\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2 = \frac{k}{2}(2R)^2 + \frac{1}{2}mv_0^2$$

b) Considerando la proyección de la segunda ley de Newton en la dirección radial se tiene

$$N = 2kR\cos^2\frac{\varphi}{2} - mR\dot{\varphi}^2$$

Sustituyendo $\dot{\varphi}^2$ se obtiene

$$N(\varphi) = 6kR\cos^2\frac{\varphi}{2} - 4kR - \frac{mv_0^2}{R}$$

La normal se anula para el ángulo φ_d que verifica

$$\cos^2\frac{\varphi_d}{2} = \frac{2}{3} + \frac{mv_0^2}{6kR^2}$$

Como $\cos^2\frac{\varphi_d}{2} \leq 1$, v_0 debe verificar

$$v_0^2 < \frac{2kR^2}{m}$$

para que no haya desprendimiento inicialmente.

c) La conservación de la energía para el movimiento central que realiza la partícula se escribe como

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2$$

siendo r la distancia de la partícula al punto A. La energía del sistema es $E = \frac{k}{2}(2R)^2 + \frac{1}{2}mv_0^2$ y su momento angular $\ell = 2mRv_0$.

Las distancias extremas corresponden a $\dot{r} = 0$, que sustituyendo en la ecuación de la energía da

$$\frac{1}{2}mv_0^2\left(\left(\frac{r}{2R}\right)^2 - 1\right) = 2kR^2\left(\left(\frac{r}{2R}\right)^2 - 1\right)\left(\frac{r}{2R}\right)^2$$

cuyas soluciones son

$$\sqrt{\frac{2k}{m}}R < v_0 < 2\sqrt{\frac{k}{m}}R : \quad r_{min} = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0 \quad r_{max} = 2R$$

$$v_0 = 2\sqrt{\frac{k}{m}}R : \qquad r = 2R$$

$$v_0 > 2\sqrt{\frac{k}{m}}R : \quad r_{min} = 2R \quad r_{max} = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0$$

Ejercicio 2

a) La aceleración relativa es

$$\vec{a'} = \ddot{x}\hat{\imath} + 2\alpha(\dot{x}^2 + x\ddot{x})\hat{\jmath}$$

Aplicando el teorema de Coriolis, la aceleración absoluta resulta

$$\vec{a} = (\ddot{x} - \Omega^2 x)\hat{\imath} + 2\alpha(\dot{x}^2 + x\ddot{x})\hat{\jmath} - 2\dot{x}\Omega\hat{k}$$

b) La fuerza resultante que actúa sobre la masa es

$$\vec{F} = -N_1 \sin(\beta)\hat{\imath} + (N_1 \cos(\beta) - mg)\hat{\jmath} + N_2\hat{k}$$

Aplicando la ley de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, se obtiene

$$\begin{aligned} -N_1 \sin(\beta) &= m(\ddot{x} - \Omega^2 x) \\ N_1 \cos(\beta) &= 2m\alpha(\dot{x}^2 + x\ddot{x}) + mg \end{aligned}$$

donde β es el ángulo que forma la tangente a la curva con Ox.
Dividiendo ambas ecuaciones resulta

$$\tan(\beta) = 2\alpha x = \frac{\Omega^2 x - \ddot{x}}{2\alpha(\dot{x}^2 + x\ddot{x}) + g}$$

Finalmente, la ecuación de movimiento es

$$\ddot{x} + 4\alpha^2 x(\dot{x}^2 + x\ddot{x}) + (2\alpha g - \Omega^2)x = 0$$

c) Las condiciones iniciales son $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = 0$. Sustituyendo en la ecuación de movimiento se obtiene

$$\ddot{x}(0) = \frac{\Omega^2 - 2\alpha g}{1 + 4\alpha^2 x_0^2} x_0$$

por lo que la condición para que la partícula se aleje de O es

$$\Omega^2 > 2\alpha g$$