Universidad de la República — **Geometría y Álgebra Lineal 1**
Facultad de Ingeniería - IMERL — **Curso Anual 2014**

Examen Julio de 2015

Cédula	Apellido y Nombre

Ejercicio 1. *Se considera* $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$ *transformación lineal que cumple que*

$$T\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = x^2+1,\ T\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = x+1,\ T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = x^2+t+1,\ T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x-1$$

.

1. *Hallar al expresión de* $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
2. *Hallar* $N(T)$*, su dimensión y deducir la dimensión de* $Im(T)$.
3. *Determinar la matriz asociada* ${}_{\mathcal{B}_2}[T]_{\mathcal{B}_1}$ *donde* $\mathcal{B}_1 = \{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ *y* $\mathcal{B}_2 = \{x-2, 2x^2, -x^2+x-3\}$.
4. *Sea ahora* $S : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ *tal que* ${}_{\mathcal{B}_3}[S]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $\mathcal{B}_3 = \{(-1,1),(2,1)\}$.
   Hallar $S \circ T$.

Ejercicio 2. *Se consideran las rectas* $r_1 : \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$, $r_2 : \begin{cases} x+y-2z+1=0 \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$

1. *Hallar por* $A = (-2,0,1)$ *la ecuación de una recta* t *que sea ortogonal a* r_1 *y a* r_2.
2. *Hallar por* $B = (0,0,-1)$ *una recta que se corte con* r_1 *y sea ortogonal a* r_2
3. *Determinar la distancia entre* r_1 *y* r_2.

Ejercicio 3.
1. *En* $\mathbb{R}^3$ *se considera el plano* α *de ecuación* $\alpha : ax+by+cz+d=0$ *y un punto* $P = (x_p, y_p, z_p)$.
   Deducir la fórmula de la distancia de P *al plano* $\alpha, d(P,\alpha) = \frac{|ax_p+by_p+cz_p+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.
2. *Sean* V_1, V_2, V_3 *espacios vectoriales de dimensión finita con bases* $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ *respectivamente.* $T : V_1 \to V_2$, $S : V_2 \to V_3$ *transformaciones lineales.*
   a) *Probar que* $S \circ T$ *es una transformación lineal.*
   b) *Probar que se cumple que* ${}_{\mathcal{B}_3}[S \circ T]_{\mathcal{B}_1} = {}_{\mathcal{B}_3}[S]_{\mathcal{B}_2}\mathcal{B}_2[T]_{\mathcal{B}_1}$.
3. *Sea* V *un espacio vectorial,* S_1 *y* S_2 *subespacios vectoriales.*
   a) *Definir* $S_1 \oplus S_2 = V$
   b) *Probar que si* $\mathcal{B}_1$ *es base de* S_1 *y* $\mathcal{B}_2$ *es base de* S_2 *y* $V = S_1 \oplus S_2$, *entonces* $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ *es base de* V.