Universidad de la República **Cálculo I**

Facultad de Ingeniería - IMERL **Curso anual 2017**

EXAMEN – JUEVES 19 DE JULIO DE 2018

Nro examen	Cédula	Apellido y nombre

- El puntaje total es 100 puntos.
- La duración del parcial es tres horas.

Ejercicio 1: (15 puntos)

a) Probar la fórmula de integración por partes para primitivas.

Ver teórico pág 100 Proposición 243.

b) Hallar:

$$\int x^2 e^{3x} dx.$$

Aplicando partes para $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{e^{3x}}{3}$ concluimos que:

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \int x e^{3x}.$$

Aplicando partes nuevamente al segundo sumando con $f(x) = x$ y $g(x) = \frac{e^{3x}}{3}$ e integrando e^{3x} llegamos a la siguiente expresión:

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x}.$$

Ejercicio 2: (15 puntos)

a) Hallar la siguiente primitiva utilizando el método que le resulte mas conveniente:

$$\int log(x) dx$$

Si aplicamos partes para $f(x) = log(x)$ y $g(x) = x$ obtenemos que:

$$\int log(x) dx = log(x)x - x.$$

b) Calcular la siguiente integral:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} cos(x) log(sen(x)) dx$$

Utilizando la fórmula de sustitución con $u = sen(x)$:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} cos(x) log(sen(x)) dx = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} log(u) du.$$

Utilizando la parte anterior llegamos a que la integral buscada es:

$$-log(\frac{\sqrt{3}}{2})\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

Ejercicio 3: (20 puntos)

1. Enunciar y probar el criterio de comparación para series de términos no negativos.

   Ver teórico pág 50 proposición 130.

2. Clasificar la siguente serie:
$$\sum \frac{1}{n!}$$
Si consideramos la serie de término $\frac{1}{n^2}$ es claro que $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n^2}$ a partir de cierto n_0 y utilizando el criterio de comparación, como $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, entonces $\sum \frac{1}{n!}$ también lo hará.

Ejercicio 4: (25 puntos)

Considere la función $cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

a) Halle $P_4(cosh(x), 0)$.

Como $(cosh(x))' = senh(x)$, $senh(0) = 0$ y $cosh(0) = 1$ se tiene que:
$$P_4(cosh(x), 0) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$$

b) Calcule el siguiente límite:
$$lim_{x\to 0}\frac{cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2}}{x^4}.$$
Justifique.
$$lim_{x\to 0}\frac{cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2}}{x^4} = lim_{x\to 0}\frac{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + r_4(x) - 1 - \frac{x^2}{2}}{x^4} = im_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{4!} + r_4(x)}{x^4}.$$
Como $r_4(x) = o(x^4)$ se obtiene que el límite buscado es $\frac{1}{24}$.

Ejercicio 5: (25 puntos)

Considere la función $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$:
$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4x + 4 & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

a) Grafique f.

b) Halle $G : [0, 4] \to \mathbb{R}$ siendo $G(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Si $0 \leq x \leq 2$ entonces $G(x) = \int_0^x -t + 2dt = -\frac{x^2}{2} + 2x$. Si $2 < x \leq 4$ entonces $G(x) = \int_0^2 -t + 2dt + \int_2^x t^2 - 4t + 4 = 2 + \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - \frac{8}{3} = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - \frac{2}{3}$.

c) Pruebe que G es derivable en $(0, 4)$.

Como f es continua en $[0, 4]$, utilizando el Teorema fundamental del Cálculo, concluimos que G es derivable y $G'(x) = f(x)$.